А. А. ЗИНОВЬЕВ

ЛОГИКА НАУКИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МЫСЛЬ»
МОСКВА. 1971

16
3—63

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

$\frac{1—5—7}{165—70}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

В данной книге излагается концепция логики, сформулированная в работах автора, главным образом в работах «Основы логической теории научных знаний» (Москва, 1967), «Логическое следование» и «Очерк многозначной логики» («Проблемы логики и теории познания». Москва, 1968) и «Комплексная логика» (Москва, 1970). В отличие от этих работ здесь внесены значительные дополнения и исправления, к минимуму сведено изложение формального аппарата, более подробно разъясняются основные понятия и принципы, намечаются точки соприкосновения логики и методологии науки. С другой стороны, здесь опущены многие вопросы, рассмотренные в упомянутых работах, с целью выделить и сделать более прозрачными основные идеи излагаемой концепции. В частности, круг проблем, связанных с многозначной логикой и теорией логического следования, подробнее рассмотрен в упомянутых выше работах.

По вопросам, рассматриваемым в данной книге, имеется большая литература. Но мы не имеем здесь возможности сопоставить наше понимание этих вопросов с пониманием их в работах других авторов. Более того, мы считаем, что такое сопоставление было бы здесь неуместно. Оно увело бы нас в область довольно бесперспективной полемики и выяснения сомнительной или случайной преемственности идей. Читателя, желающего осуществить сравнение излагаемой здесь концепции с другими и получить более широкое представление о положении в логике науки, мы отсылаем к опубликованным в последнее десятилетие работам С. А. Яновской, Б. В. Бирюкова, И. Н. Бродского, Е. К. Войшвилло, Д. П. Горского, А. А. Ивина, П. В. Копнина, В. А. Лекторского, И. С. Нарского, М. В. Поповича, Ю. А. Петрова, Б. Н. Пятницына, А. И. Ракитова, Г. И. Рузавина, В. Н. Садовского, О. Ф. Серебрянникова, В. А. Смирнова, Г. А. Смирнова, Е. Д. Смирновой, А. Л. Субботина, Ю. Н. Солодухина, П. В. Таванца, А. И. Уемова, В. С. Швырева и многих других советских логиков и философов. В работах упомянутых авторов имеется и достаточно подробная библиография по всем проблемам, затрагиваемым в нашей книге.

Глава первая

ЛОГИКА НАУКИ (ВВЕДЕНИЕ)

Под выражением «логика науки» мы понимаем научное направление, занимающееся исключительно применением средств логики в исследовании научных знаний (или языка науки).

Мы намеренно сказали просто о средствах логики, а не о средствах математической логики. Дело в том, что выражение «математическая логика» двусмысленно: математической логикой называют определенный математический аппарат, который находит применение в логике (но не только в логике), а также самою логику в том ее виде, какой она принимает благодаря применению этого математического аппарата. Но если даже мы договоримся употреблять это выражение исключительно во втором смысле, остается неясность другого рода, поскольку само применение математической логики к анализу языка науки можно понимать и осуществлять двояко. В первом случае предполагается готовый аппарат логики (обычно имеется в виду классическое исчисление высказываний и предикатов, изложение которого читатель может найти в любых учебниках математической логики), и этот аппарат остается лишь использовать в рассуждениях о тех или иных проблемах методологии науки. В нашу задачу не входит описание тех положительных результатов, которые достигнуты на этом пути, тем более что на эту тему имеется огромная литература. Во втором случае предполагается разработка самого аппарата логики применительно к особенностям той или иной задачи анализа языка науки. При этом известный аппарат математической логики, вошедший в учебники и ставший всеобщим достоянием, рассматривается как средство, пригодное для решения лишь отдельных проблем анализа языка науки, а именно тех, для которых он и был изобретен в свое время, но видимую связь с которыми утратил. Этот аппарат есть лишь фрагмент логики, далеко не исчерпывающий ее возможностей и далеко не безупречный с точки зрения данного его применения. В нашей книге излагается второе понимание, основывающееся на определенной логической концепции. Поэтому мы и предпочитаем говорить просто о средствах логики, не предрешая заранее вид этих средств.

§ 1. Одна особенность современной логики

Логика науки в нашем понимании не есть какая-то особая наука, отличная от логики и существующая наряду с ней. Это лишь особый аспект логики, выделение которого связано с одной особенностью современной логики. В силу исторически сложившихся условий современная логика стала прежде всего и по преимуществу совокупностью определенного рода формальных построений (исчислений) и совокупностью теоретических положений о правилах их конструирования, об их свойствах и взаимоотношениях. Формальные построения, которые по идее должны были бы служить лишь средством (аппаратом) решения определенных проблем логики, приобрели самодовлеющее значение и стали сначала основным ее содержанием, а затем даже превратились в особый объект, изучаемый в логике.

Формальные построения логики допускают различные содержательные интерпретации. Использование их для описания каких-то элементов языка науки и правил оперирования ими есть лишь одно из возможных использований, хотя генетически оно и послужило предпосылкой их изобретения. Причем упомянутое использование связано со сравнительно сложными абстракциями и допущениями, предполагает некоторое предварительное (не зависящее от формальных построений) понимание тех или иных элементов языка науки. Естественно, при этом встают вопросы о соответствии такого рода внеформального понимания элементов языка науки и формул логических исчислений, избранных для их описания.

Формальные системы логики суть дедуктивные построения. При создании их первостепенное значение приобретают соображения удобства исследования их свойств, соображения математической простоты, изящества и т. п. Зачастую соображения, связанные с последующей интерпретацией формальных систем, вообще не принимаются во внимание. Следствием этого является возможность отрыва теоретических построений от эмпирических фактов и несоответствий между этими фактами и интерпретированными некоторым образом формулами рассматриваемых построений. Разрешение же вопросов о том, как поступать с такого рода несоответствиями, требует какой-то системы абстракций и допущений, модификации имеющихся формальных построений и конструирования новых.

Но и независимо от указанных несоответствий преобладание дедуктивного метода ведет к существенной перестройке способов абстрагирования сравнительно с таковыми при «описательном» («эмпирико-аналитическом») методе, а значит и к изменению отношения научных положений и эмпирических фактов. Дедуктивные построения уже нельзя рассматривать как продукт непосредственной абстракции от эмпирически данных фактов. Это, скорее, суть лишь удобные с какой-то точки зрения средства исследования этих фактов. Наконец, вообще невозможно судить о применимости тех или иных формальных построений в исследовании некоторой предметной области, если о ней нет никаких предварительных сведений, если она уже не изучена в какой-то мере на описательном уровне. В современной логике эта сторона дела оказалась сравнительно слабо развитой. Исследование проблем логики с учетом этой стороны дела и образует логику науки (во всяком случае ее основу).

Приложения математической логики к самим объектам конкретных наук, а не к их языку породили взгляд на логику как на науку, область исследования и приложения которой образует не только (и даже не столько) язык науки, но и предметные области, изучаемые ими (например, электрические сети, системы клеток мозга, числа и т. п.). Вследствие этого значительная часть прежней проблематики логики выпала из сферы ее внимания или во всяком случае попала в категорию второсортной. Возвращение к рассмотрению ее в духе идей и методов современной логики — один из источников логики науки.

Наконец, в связи с только что упомянутым пониманием логики правила логики стали рассматривать как неуниверсальные, т. е. как варьируемые в зависимости от особенностей предметных областей, изучаемых различными науками. Это выразилось, в частности, в идеях интуиционистской логики и логики квантовой механики. Выяснение того, являются правила логики универсальными или нет и в каком смысле особенности предметных областей наук сказываются на логических средствах этих наук, — это точно так же есть задача логики науки, сама по себе достаточно серьезная, чтобы оправдать ее существование и известный суверенитет.

Понимание формальных построений (логических исчислений) как средств решения проблем логики не устраняет того, что разработка логических исчислений в силу целого ряда технических особенностей сохраняет значение самостоятельной области логических исследований. Построение логического исчисления в соответствии с выработанными в логике нормами, исследование его свойств и получение каких-то следствий в нем — все это может быть сделано отвлеченно от той конкретной проблемы, ради разрешения которой было изобретено это исчисление. Так что существование в логике направления, занятого разработкой логической техники (если так можно выразиться), и направления, ставящего своей прямой задачей анализ языка науки, есть естественное разделение труда.

§ 2. Абстракции

Анализ языка науки в рамках возможностей логики опирается на ряд абстракций и допущений. Ничего особенного это обстоятельство в себе не заключает, однако к тем результатам, которые получаются в логике на базе этих абстракций и допущений, относятся не совсем обычно. С одной стороны, от них требуют, чтобы они были точной копией фактически употребляемых элементов языка науки. В частности, при этом требуют, чтобы схема изображения предложений в логике точно совпадала с тем, как на самом деле строят предложения, а правила рассуждения точно описывали бы фактически осуществляемые рассуждения в науке (подобно тому как в некоторых разделах биологии описывают строение растений и поведение животных). И когда обнаруживают, что схемы логики не совпадают буквальным образом с теми фактами языка, для которых они придуманы, впадают в другую крайность: полагают, что результаты логики относятся не непосредственно к реальным языкам науки, а лишь к особым искусственным (идеализированным) языкам, и еще надо проделать какую-то дополнительную работу над ними, чтобы приблизить их к языку конкретных наук. Чтобы убедиться в неосновательности такого рода мнений и в обычности отношения результатов логики к языку науки, полезно упомянутые абстракции и допущения с самого начала знать в явном виде. Мы сформулируем их частично в данной главе, частично в последующих главах (по мере надобности).

§ 3. Естественный и научный язык

Эмпирически данный материал, наблюдение которого образует отправной пункт логики науки, есть язык науки. Последний базируется на обычном (естественном) языке и не может существовать без него в качестве языка: уничтожение обычного языка привело бы к уничтожению и языка науки (он стал бы непонятным).

Граница между научным языком и обычным языком относительна, исторически условна. Часть терминов и высказываний из научного языка переходит в обычный. С другой стороны, многие термины и высказывания обычного языка используются в науке. С помощью обычного языка вводятся специальные термины науки, разъясняется смысл ряда научных высказываний. Навыки построения терминов и высказываний в обычном языке используются для тех же целей в научном языке и т. д. Однако выделение научного языка в качестве надстройки над обычным языком имеет смысл как абстракция в рамках логики. Дело в том, что обычный язык формируется и усваивается как элемент очень сложного комплекса связей, в которые включена эволюция человечества и каждого отдельного человека. Складывающиеся здесь знания и способы их получения и усвоения лишь в незначительной мере поддаются описанию в понятиях одной только логики. Допуская здесь, что естественный язык дан, мы тем самым допускаем какие-то термины и высказывания и какие-то способы их получения как не подлежащие дальнейшему логическому анализу (допускаем какие-то «дологические» или «внелогические» средства получения знаний). Логика науки оставляет без внимания все те средства и условия познания, которые связаны с оперированием естественным языком и не поддаются описанию в понятиях логики.

§ 4. Исследователь

Логика науки рассматривает язык науки как совокупность видимых текстов и слышимых речей ученых, т. е. как совокупность воспринимаемых «вещей» особого рода. Но было бы неверно полагать, будто в ней вообще не принимаются во внимание те, кто создает науку и оперирует научными знаниями, скажем, исследователи. Исключать исследователей полностью при рассмотрении языка науки не только невозможно (как увидим ниже), но и неразумно. Многие проблемы логики науки решаются легче, если явным образом учитывать исследователей, а некоторые проблемы вообще неразрешимы без этого. Однако, считаясь с тем, что наука есть продукт деятельности исследователей и все операции с научными знаниями суть операции исследователей, мы должны принять ряд абстракций, относящихся к ним.

Исследователей существует много, и они заметно различаются. Но мы все же допустим, что все исследователи совершенно одинаковы, и если они как-то различаются в одной и той же ситуации, то их различия совершенно адекватны различным положениям каждого из них в этой же ситуации. Так что мы исключаем всякие разногласия между исследователями и будем вообще говорить об одном исследователе как среднем представителе класса научных работников или подобных им существ и технических сооружений. Это допущение является совершенно естественным и реализуемым в практике науки. Так, все признают, что в одной и той же ситуации невозможно, чтобы один исследователь получил некоторое истинное высказывание, а другой — истинное отрицание этого же высказывания. Просто мы будем рассматривать всех исследователей как существа или сооружения, проделывающие некоторые операции одинаково, если они вообще способны проделывать эти операции.

Исследователем может быть вообще любое существо или устройство, способное проделывать те операции, которые мы ему будем приписывать. Мы не намерены злоупотреблять этим (например, не будем приписывать исследователю способности решать неразрешимые задачи), и если где-то мы допустим преувеличение, читатель вправе будет расценить это как уязвимое звено нашей концепции. Те логические операции, которые мы будем рассматривать, на самом деле доступны особого рода техническим устройствам. Во всяком случае мы будем стремиться к тому, чтобы по возможности обезличить описание логических операций и приблизить его к некоему машинному идеалу как к удобному средству пояснения.

§ 5. Чувственное отражение

Мы допускаем, что исследователь наделен некоторым природным (чувственным) аппаратом отражения, задача которого — испытывать внешние воздействия и создавать в себе (в исследователе) определенные состояния. Причем исследователь может создавать такого рода состояния в своем аппарате отражения и без непосредственного воздействия внешних раздражителей (воспоминание, воображение и т. п.). Для наглядности этот аппарат отражения можно уподобить табло с электрическими лампочками, разбитому на различные специализированные секции, а состояния его — тому, что лампочки время от времени загораются в каком-то порядке и в каких-то комбинациях.

Мы допускаем, что упомянутый аппарат отражения необходим для создания, хранения и использования различных элементов языка науки. Но деятельность его мы рассматривать не будем. Для нас вообще не будет играть роли все то, что происходит в мозгу и вообще в организме человека (внутри любого отражающего существа или устройства, — любого исследователя). Поэтому если мышлением называть какие-то процессы, происходящие в мозгу человека, то придется признать, что логика не изучает мышления. Она не изучает не только «неправильное» мышление, но и «правильное». Традиционное определение логики как науки о правильном мышлении имело смысл лишь постольку, поскольку само мышление тавтологически понималось как осуществление логических операций. Короче говоря, с точки зрения логики науки голова исследователя принимается во внимание не как предмет исследования, но лишь как полезное средство для осуществления некоторых зримых операций со зримыми элементами языка науки. Изучая упомянутые операции, логика через них не изучает никаких процессов мышления. Она изучает сами эти операции, а не что-то такое, что скрыто за ними и управляет ими.

§ 6. Объективность

Деятельность исследователя по получению знаний можно рассматривать двояко: 1) субъективно, т. е. в том виде, как она переживается самим исследователем; 2) объективно, т. е. в том виде, как ее можно наблюдать со стороны (фиксируя лишь то, что можно видеть, слышать и т. д.).

Мы будем излагать чисто объективную точку зрения на знания. Совершенно очевидно, что понятия «идеальное», «духовное», «мысленное» и т. п., обычно употребляемые в случае субъективного подхода, утрачивают при этом практический смысл, поскольку сами знания рассматриваются как нечто ощутимое. Даже в тех случаях, когда предметами знаний являются несуществующие и, следовательно, не поддающиеся наблюдению предметы, сами знания должны быть доступны наблюдению. В противном случае они отсутствуют.

Мы допускаем, что деятельность исследователя можно всегда полностью наблюдать и в известных пределах контролировать. В дальнейшем ссылки на исследователя обычно будут опускаться из чисто литературных соображений. Но они могут быть легко восстановлены.

§ 7. Познавательные действия

Процесс получения знания складывается из активных действий исследователя с некоторым данным материалом — с чувственно данными или воображаемыми предметами и имеющимися знаниями. Эти действия фиксируются в языке посредством выражений «возьмем», «примем», «допустим», «из... получаем...», «заменим... на...» и т. п.

Действия с воображаемыми предметами можно свести к действиям с реальными предметами, а последние — к действиям с предложениями вида «если X, то Y», где X есть описание предметного результата действия, а Y — то знание, которое получается при этом условии. Таким образом, активность исследователя в отношении изучаемых предметов может быть элиминирована из языка науки. Иначе говоря, наш исследователь по отношению к изучаемым предметам будет вести себя так, чтобы не вносить в них никаких изменений от себя. Эта абстракция означает, что нас будут интересовать лишь действия исследователя с элементами языка науки.

Применительно к последним логика науки в свою очередь осуществляет следующую абстракцию: она формулирует для этих действий правила, которые не зависят от свойств элементов языка науки как физических (слышимых, видимых и т. п.) предметов и от особенностей предметных областей, изучаемых различными конкретными науками.

§ 8. Термины и высказывания

Язык науки состоит из совокупности предложений, построенных по правилам некоторого (русского, английского и т. п.) языка и образующих его базис, а также из совокупности развитых на этом базисе дополнительных средств — формул, графиков, таблиц, схем и т. п. Предметом внимания логики науки является лишь то, что охватывается терминами «высказывание» («суждение»), «термин» и «логический знак» (или «логический оператор»). В дальнейшем мы точно определим, что такое термин и высказывание, и рассмотрим подробно логические операторы. Но сейчас нам необходимо сделать ряд предварительных замечаний об этом, и мы вынуждены поэтому допустить, что читатель имеет какое-то представление о них. На всякий случай приведем несколько примеров. Примеры высказываний: «Электрон заряжен отрицательно», «Если по проводнику пропустить электрический ток, то вокруг него возникает магнитное поле», «Все четные числа делятся на два» и т. п. Примеры терминов: «атом», «капитал», «элементарная частица, имеющая положительный заряд», «ускорение 10 *м/сек*», «магнитное поле» и т. п. Примеры логических операторов: «и», «или», «не», «если..., то...», «тот, который», «все» и т. п.

Это не означает, однако, что упомянутые выше дополнительные средства языка науки вообще выпадают из сферы внимания логики и не подчиняются тем законам, которые она устанавливает. Дело в том, что в реальных науках эти дополнительные языковые средства так или иначе «прочитываются» с помощью высказываний. Им фактически ставится в соответствие некоторое множество высказываний, что равносильно умению обращаться с ними. Возьмем, например, формулу вида $y = 2x$, изображающую зависимость величин x и y. Ей соответствует множество предложений вида «Если $x = a$, то $y = 2a$», где область значения a образуют величины x. И если в рассматриваемых дополнительных средствах языка науки имеется какая-то часть, для которой не находятся соответствующие высказывания (которая не «прочитывается» в высказываниях), то к ней нельзя будет применить правила логики, и только. Но это относится и к огромному числу предложений науки, без которых наука невозможна, но которые по тем или иным причинам не приводятся к логически стандартизированному виду.

Продолжим наш пример. Пусть у нас помимо приведенной выше формулы имеется еще некоторый график, который изображает зависимость величины z от величины y. Этот график точно так же может быть прочтен предложениями вида «Если $y = a$, то $z = b$». Если нам известно, что $x = 2$, то по правилам умозаключений, которые логика формулирует для высказываний, мы делаем вывод о том, что $y = 4$. Пусть одно из высказываний, соответствующих нашему графику, есть высказывание «Если $y = 4$, то $z = 8$». Из него и предшествующего заключения $y = 4$ мы получаем по правилам логики, что $z = 8$. И все это рассуждение стало возможно лишь благодаря прочтению данных формулы и графика в высказываниях. Логика не рассматривает правила этого прочитывания.

Выше, приведя примеры терминов и высказываний, мы привели примеры того, что известно под именем слов, групп слов и предложений. Ничего предосудительного в этом нет, ибо вообще невозможно привести примеры высказываний и терминов, не приведя тем самым примеры предложений и, соответственно, слов, символов, групп слов и символов. Однако это удвоение общих названий для одних и тех же примеров может быть расценено различно.

Широко распространена точка зрения, согласно которой высказывания (суждения) и предложения различаются как нечто идеальное (мысленное) и материальная оболочка этого идеального. Эта точка зрения соответствует субъективному подходу к научным знаниям, о котором говорилось выше. По нашему мнению, эта точка зрения означает излишнее «умножение сущностей». Нам кажется более предпочтительной другая точка зрения. Выбирая в качестве предмета внимания определенного вида предложения, логика осуществляет их стандартизацию, т. е. рассматривает их лишь в той мере, в какой они расчленяются строго определенным образом на логические элементы — на термины, высказывания и логические операторы. Например, предложение «Нечетное число не делится на два» расчленяется не на шесть слов, а лишь на два термина «Нечетное число» и «не делится на два». Эта стандартизация соответствует тому, что реальный исследователь, имеющий дело с наукой, так или иначе умеет устанавливать логическое (описываемое в терминах логики) строение предложений или находить для них другие предложения (адекватные с точки зрения сообщаемого знания), которые можно легко подвести под стандартную схему. Если исследователь не умеет в данных предложениях находить их логическое строение, он не может воспользоваться теми советами, которые дает логика науки Аналогично обстоит дело с терминами.

Возьмем фразу «Самолет пролетел сто километров». Ее можно истолковать двояко: (1) как «Самолет находится на расстоянии ста километров (от некоторого места)»; (2) как «Расстояние, которое преодолел самолет, включает отрезок в сто километров». Различие этих истолкований видно из следующего. Во втором случае из данного высказывания будет следовать, что самолет пролетел пятьдесят (десять и т. п.) километров, а в первом — нет, т. е. высказывание «Самолет пролетел пятьдесят километров» в первом случае будет неверно, если верно (1). Отрицание высказывания (2) будет означать, что самолет пролетел расстояние меньше ста километров. В первом случае оно может означать любое расстояние, не равное ста километрам. Усмотреть в самом предложении, в каком именно смысле оно употребляется, невозможно. Исследователь должен это обнаружить из каких-то других источников.

Когда в логике некоторые предложения изображают схемой (символом) вида $S — P$, то это не следует воспринимать как предписание именно так строить предложения (хотя стандартизация языка науки, вообще говоря, есть явление весьма желательное). Это следует воспринимать просто как сокращенную запись того, что некоторые предложения расчленяются на субъект, предикат и соединяющий их логический оператор. И если мы имеем правила оперирования с высказываниями такого вида, то эти правила относятся не к каким-то идеальным сущностям, а ко всем реальным предложениям, которые удается подвести под эту схему. Причем умение исследователя устанавливать логический тип предложения и его строение мы предполагаем данным.

Здесь имеет место ситуация, сходная с символами химии. Например, символ H_2O не есть фотографическое изображение воды. Это лишь краткая и удобная запись того, что молекула воды состоит из двух атомов водорода и атома кислорода. И никому в голову не приходит мысль о том, что этот символ относится к какой-то искусственной воде.

§ 9. Логические операторы

Из данных терминов образуются сложные термины и высказывания, а из высказываний — сложные высказывания и сложные термины. Причем в языке науки имеются какие-то показатели того, из каких именно высказываний или терминов построено данное сложное высказывание и термин. Это — специальные слова вроде «и», «или», «не», «если, то» «тот, который» и т. п., грамматическая форма слов, особые их комбинации и расположение и т. п. Специальные слова, символы и их группы такого рода мы будем называть логическими операторами. В обычном и научном языке они не всегда выражаются стандартно, однообразно и явно. Мы, однако, должны допустить, что они суть особые, локализованные в пространстве и времени, воспринимаемые предметы. Исключим из рассмотрения также факт многозначности языковых средств и разнообразие выражений одних и тех же функций (выполняемых ролей) знаков. Эти абстракции означают следующее: в реальных языках имеется нечто такое, что соответствует тем символам, с помощью которых в логике обозначаются рассматриваемые операторы; эти символы однозначны, а их видимое различие есть показатель различия функций соответствующих языковых средств. Другими словами, здесь абстрагируются функции языковых средств, какой бы вид они ни имели. С другой стороны, эти абстракции означают допущение необходимых навыков распознавания этих функций в любых контекстах данного языка.

Логические операторы имеют значение не сами по себе, но лишь как элементы в структуре терминов и высказываний. Определить их свойства — значит определить свойства содержащих их языковых образований. Поэтому логические операторы сами по себе не являются терминами, а образуют особую рубрику элементов языка науки. Терминами являются лишь их обозначения в логике.

§ 10. Интуиция, наблюдение, изобретательство

Исследовать научные знания — значит прежде всего исследовать те практические навыки людей по получению и оперированию знаниями, которые сложились в истории познания (и каким-то образом усваиваются исследователями в процессе их индивидуального формирования). Эти навыки не являются чем-то данным от природы. Они изобретены людьми и изобретаются вновь вместе с прогрессом науки. У тех, кто этими навыками обладает, складывается некоторое (более или менее ясное и определенное) практическое или интуитивное понимание свойств знаний. Это понимание знаний есть необходимый элемент самих навыков оперирования ими. Фиксирование его образует отправной пункт логики как особой науки и линию соприкосновения ее первоначальных результатов с познавательной деятельностью людей.

Но интуитивное понимание, о котором здесь идет речь, складывается стихийно со всеми вытекающими отсюда последствиями — неясность, неустойчивость, наличие вариаций, фрагментарность и т. п. И логика должна приложить известные усилия, чтобы сделать его явным и недвусмысленным, устранить смешение различных форм знаний, осуществить некоторую стандартизацию и т. д., чтобы эксплицировать его. А это не есть просто запись того, что общепринято и общеизвестно. Это есть продолжение стихийной деятельности людей по изобретению и усовершенствованию логических средств языка, но уже на профессиональном уровне. Логика с самого начала своего существования и в самой своей основе создает нечто новое сравнительно с тем, что известно в интуиции.

Из сказанного следует, что идея приблизить логику к естественному языку есть плод недоразумения. Скорее надо не логику приближать к естественному языку науки, заставляя ее (логику) учитывать расплывчатость, многозначность, неопределенность и т. п. средств языка науки, аморфность ее выражений, разнообразие вкусов, способностей и образования ученых и т. д., а язык науки приближать к логике, сообщая ученым определенные сведения о ее результатах. Впрочем, именно так и происходит на самом деле, если иметь в виду постепенное и неявное проникновение результатов логики в науку.

Идея приблизить науку к логике вовсе не означает желания установить такие связи и отношения между элементами языка науки и придать им такой вид, чтобы наука стала выглядеть суммой примеров для логических нормативов и непосредственной их реализацией. Такая идеально логизированная наука есть утопия. Незнание, игнорирование и даже преднамеренное нарушение логических норм в реальной истории науки часто является совершенно необходимым социально-психологическим условием тех мутаций в науке, без которых невозможен ее прогресс. Эту мысль можно, конечно, оспаривать. Но бесспорно одно: в самой логике нет никаких положений, обязывающих ученых выполнять ее правила.

Конечно, наблюдение фактически складывающихся в науке познавательных ситуаций играет роль для логики. Но оно не образует метода логического исследования. Логика изучает свой предмет вовсе не путем эмпирических наблюдений за физиками, химиками, геологами и т. д. Логика изучает не эмпирически сложившуюся в науке ситуацию, а ситуации логически мыслимые, логически возможные. Логика исследует логически мыслимые возможности, вытекающие из некоторых предпосылок. Возьмем, например, два высказывания. Всем хорошо известно, что высказывания могут быть истинными и ложными. Какие же комбинации из них могут быть получены? Можно подсчитать (это тривиальная задача), что возможны только шестнадцать комбинаций, когда значение истинности сложного высказывания есть функция значений истинности двух образующих его высказываний. И не зная положения в той или иной конкретной науке, логик может сказать, что в науке такие комбинации могут встретиться, а другие комбинации не могут встретиться. Они невозможны, как невозможен вечный двигатель, как невозможен коэффициент полезного действия больше ста процентов и т. п. Логика есть наука не столько наблюдающая, сколько изобретающая.

§ 11. Правила логики

Правила логики (логические правила) суть правила оперирования высказываниями и терминами (и, естественно, входящими в них логическими операторами). Эти правила не открываются людьми в окружающем их мире, а изобретаются вместе с изобретением и совершенствованием навыков конструирования терминов и высказываний и действий с ними. Логика как особая наука, приступая к изучению этих правил, сталкивается со следующим обстоятельством. Она обнаруживает эмпирически данными определенного вида термины и высказывания (и содержащие их операторы) и уже функционирующими некоторые правила обращения с ними. И с этой точки зрения правила, устанавливаемые логикой, имеют опытную основу. Но логика вместе с тем обнаруживает: свойства определенного вида терминов и высказываний (и содержащих их операторов) установлены лишь для некоторых случаев их употребления, но не для любых возможных ситуаций; свойства эти установлены неотчетливо и не с предельной общностью (нередко в связи с конкретным видом языковых форм); не установлены отношения различных операторов и т. д. Устраняя эти недостатки, логика продолжает творческую деятельность человечества по разработке и совершенствованию упоминавшихся средств языка науки, и с этой точки зрения логические правила оперирования этими средствами языка суть не что иное, как определения свойств логических операторов и содержащих их образований из терминов и высказываний.

Кроме того, сами методы логики позволяют разработать точные правила не только для фактически встречающихся ситуаций, но и для любых логически мыслимых (возможных) ситуаций, а также выяснить логически возможные виды терминов и высказываний (и операторов, естественно), которые, может быть, еще не употребляются в науке. Во всяком случае, получив некоторый материал для работы, а также своего рода задание и ориентиры, логика делает свое дело уже независимо от этого материала, исследуя логически возможные случаи и устанавливая для них соответствующие правила. И с этой точки зрения логику можно считать априорной наукой, результаты которой имеют силу для любой науки, если только последняя вводит в обиход элементы языка, подпадающие под описанные в логике типы.

Возьмем, например, логический оператор, который обычно истолковывают как «и». В реальных языках логика обнаруживает сложные высказывания, истинные лишь тогда, когда все входящие в их состав высказывания истинны. Роль операторов в таких случаях помимо слова «и» выполняют и другие средства: запятая, слово «но», слова «а также» и даже порой слова «если, то», которым в логике предназначена совсем иная роль. И хотя все указанные средства выполняют в языке и другие функции, существенно одно: случаи указанного выше вида фактически встречаются, и для того, чтобы выделить функции указанного оператора, в логике вводят особый знак конъюнкции. Последний выполняет в логике исключительно роль оператора рассмотренного вида. Его можно истолковывать теперь как «и». Но не только так: любые языковые средства, выполняющие такую роль в языке, суть пример конъюнкции. С другой стороны, используя свои методы (в частности, таблицы истинности), логика устанавливает связь такого рода операторов с другими (с «или», «не» и т. п.), определяя свойства конъюнкции для всех возможных ситуаций (для всевозможных комбинаций с другими операторами), а также может ввести новые операторы, точно сформулировав правила их употребления (например, так вводится материальная импликация, антиимпликация и т. п.).

Продолжим наш пример. Всем известны правила приписывания значения истинности высказываниям с операторами «и», «или» и «не» в простых комбинациях и в случаях, когда ограничиваются двумя значениями — «истинно» и «ложно». Эти правила привычны и воспринимаются как нечто само собой разумеющееся, данное от природы. Но достаточно взять случай, когда высказывания могут принимать три значения истинности (или даже более), как обнаруживается, что никаких само собой разумеющихся правил для этих случаев вообще нигде нет. Они должны быть изобретены, вновь установлены кем-то и затем получить более или менее широкое признание. При этом выясняется, что возможны различные варианты этих правил. В частности, для отрицания возможны по крайней мере три различных варианта. И во избежание путаницы при этом должны быть введены различные логические операторы, учитывающие эти вариации.

Логика, далее, изучает свойства терминов и высказываний, не зависящие от того, являются ли они терминами и высказываниями физики, химии, биологии, истории или какой-либо иной науки. Она изучает правила, общие любым терминам и высказываниям с определенной структурой, и не рассчитана ни на какую науку специально. Нет логики специально для физики, химии и т. п. Нет логики специально для математиков, физиков, историков, макрофизиков, микрофизиков и т. п., ибо логика находит в науке именно то, что она ищет: правила, которые не зависят от сферы науки (от особенностей той или иной предметной области).

Таким образом, в силу самих методов, используемых в логике, формулируемые ею правила универсальны. Если мы ввели некоторый оператор *А* так, что по его определению будет иметь силу правило *X* для содержащих его терминов или высказываний, то не может встретиться случай, когда оператор *А* употребляется, а правило *X* не имеет силы.

Когда говорят о правилах логики, то обычно имеют в виду правила вывода одних высказываний из других. Однако правила логики не сводятся к правилам вывода. В логике рассматриваются правила образования сложных терминов из простых, высказываний из терминов и других высказываний, терминов из высказываний; правила построения сложных комплексов высказываний и терминов, образующих теории, правила оперирования некоторыми терминами (например, модальными предикатами) и т. д. Причем различные типы правил логики имеют различные источники формирования и различные способы применения, и судить о них в общем виде без анализа этих их особенностей — значит говорить нечто банальное или ошибочное (в силу односторонности).

Возьмем, например, термины «человек» и «курит». Посредством оператора «который» из них можно образовать новый (сложный) термин «человек, который курит». Если исследователю известен смысл данных терминов и свойства оператора «который», то ему известен смысл образованного из них сложного термина. И это возможно в силу особых логических правил обращения с терминами, которые явным образом отличны от правил вывода.

§ 12. Онтологические утверждения в логике

Логика ничего не утверждает о предметах, которые отображаются в терминах и высказываниях. Но законам логики в ряде случаев можно придать вид утверждений не о свойствах терминов и высказываний, а о предметах, к которым термины и высказывания относятся (т. е. вид онтологических утверждений). Например, утверждению «Из высказывания X следует высказывание Y» можно придать вид утверждения «Если имеет место ситуация X, то имеет место ситуация Y».

Такая онтологизация утверждений логики связана, однако, не с природой этих законов, а с привычкой относить содержание высказываний к соответствующим предметам и с удобствами языка. Достаточно поставить вопрос о том, на каком основании принимаются подобные утверждения, как обнаружится, что они суть следствия определений содержащихся в них логических операторов.

Из логических утверждений, далее, по некоторым правилам получаются онтологические утверждения. Так, из утверждения «Из X логически следует Y», построенного из субъектов «высказывание X» и «высказывание Y» и двухместного предиката «логически следует», получается условное высказывание «Если X, то Y», состоящее из высказываний X и Y и логического оператора «если, то». Особенность таких онтологических следствий из логических законов состоит в том, что они не зависят от опыта, истинны в силу чисто логических оснований. Так, если на самом деле из X логически следует Y, то «Если X, то Y» истинно независимо от конкретного содержания X и Y.

В логике, далее, принимаются утверждения, непосредственно имеющие форму онтологических. Таковы, например, утверждения вида «Либо X, либо не-X». Однако и в этом случае подобные утверждения принимаются вовсе не потому, что так устроен окружающий нас мир (т. е. не как обобщение результатов наблюдений), а исключительно потому, что они суть следствия определений, входящих в них логических операторов или сами суть части неявного определения этих операторов. Так, операторы «и», «или», «не» и т. д. буквально по нашей воле и по соглашению вводятся в употребление такими, что утверждения «X или не-X», «Если не-не-X, то X» и т. д. будут верными для любых X. И когда мы утверждаем, например, что в мире нигде и никогда не встретится ситуация, в отношении которой будет истинно «X и не-X», то наша уверенность базируется отнюдь не на том, что мы изучили мир на все времена и во всех местах, а исключительно на том, что мы изобрели операторы «и» и «не» именно такими. Просто в нашем языке с такими операторами недопустимо признание возможности «X и не-X», и ничего более.

Конечно, практика познания заставляет людей вводить в обиход определенного вида логические операторы. Практически встречающиеся ситуации, когда одни предметы исключают другие, одни предметы сосуществуют с другими и т. д., служат отправной базой для введения в обиход соответствующих логических операторов. Но это нисколько не влияет на то, что сами они суть продукты творчества людей, что им волею людей навязываются указанные выше свойства.

Но имеет место еще более тонкое и далеко идущее отношение онтологических и логических утверждений. Оно связано с тем, что многие онтологические термины («начало», «конец», «вечно», «пространство», «время», «причина» и т. д.) могут быть уточнены посредством терминов логики со всеми вытекающими отсюда последствиями. Эти последствия образуют своего рода границы (логические табу), за которые не может выходить наука при выдвижении своих гипотез. Причем границы эти вытекают из принятых определений, а не извлекаются из опыта (т. е. априорны). Таковы, например, утверждения «Ни одно событие не может произойти раньше самого себя», «Между одновременными событиями не может быть отношения причины и следствия» и т. д.

Одним словом, в фундаменте логики вообще и любых ее разделов не лежат никакие онтологические допущения.

§ 13. Универсальность логики

Существует мнение, будто законы логики не являются универсальными, т. е. имеются случаи, когда один и тот же закон логики в одной области науки ведет к правильным результатам, а в другой — к ошибочным; будто законы логики имеют исключения, зависят от предметной области. Для подкрепления этого мнения (помимо общих пространных соображений) ссылаются на вполне определенные факты. Еще с прошлого века идет традиция, отвергающая закон противоречия в отношении переходных состояний объектов. В современной логико-философской литературе к этому присоединяют ограничения на закон исключенного третьего и двойного отрицания в интуиционистской логике, а также на законы коммутативности и дистрибутивности в «квантовой логике».

Если логика действительно не является универсальной, единой для всех наук, то ее положения не имеют априорной силы для наук, и вопрос о ее использовании в них оказывается сомнительным. Но рассматриваемое мнение есть плод недоразумения. Уместно спросить: 1) почему именно такие-то законы логики считаются неуниверсальными, а не другие? 2) Могут ли встретиться случаи, когда и другие законы логики окажутся неуниверсальными? 3) Имеются ли все-таки законы логики, являющиеся универсальными? 4) Где грань между универсальными и неуниверсальными законами логики? Ответить на подобные вопросы несхоластическим образом невозможно. Законы логики по самой своей природе универсальны, не имеют исключений, не зависят от особенностей той или иной области. От этих особенностей зависит лишь то, какие именно законы из множества возможных законов логики будут использоваться. Что касается фактов, которые якобы подтверждают эту концепцию, то они суть результат смешения различных логических форм (это мы покажем по мере изложения).

Не является аргументом в пользу тезиса неуниверсальности логики и факт множественности логических систем. Мы оставляем в стороне различие точек зрения, способностей и интересов логиков, различие интерпретаций логических исчислений, различие направлений в логике, исторический прогресс и прочие общеизвестные вещи. Возьмем наиболее интересный для нас случай: имеются два логических исчисления; они интерпретируются оба как логические теории, претендующие на описание свойств одних и тех же логических операторов; однако множества доказуемых в них формул (и значит, множества допускаемых ими правил логики) не совпадают. Если дело обстоит именно таким образом, то правильный вывод из этого факта может быть только такой: эти системы определяют различные наборы логических операторов.

Примером такого рода логических систем являются классическое и интуиционистское исчисления высказываний. Если они оба претендуют на то, чтобы дать определение свойств операторов «и», «или» и «не», то их можно представить как различные определения отрицания. И неверно думать, что имеется некое природное отрицание, которое можно познать с различной степенью глубины, полноты и точности, подобно тому как познают атомы, общества, животных и т. п., и свойства которого «интуиционисты» постигли лучше, чем «классики» (или наоборот). Прогресс здесь имеет место. Но он состоит в том, что применительно к некоторым потребностям познания отрицание дифференцировалось, и для различных его форм построены логические системы, определяющие их свойства. Различие логических систем (если, конечно, последние не являются вариациями на одну и ту же тему) есть показатель расширения и обогащения аппарата логики. Но это ни в коем случае не есть показатель того, что одни и те же законы логики верны в одних областях науки и неверны в других.

Иное дело — вопрос об универсальности определенной концепции логики. В этой связи надо заметить, что стремление представить классическую математическую логику в качестве единого средства решения любых проблем логической теории научных знаний (т. е. в качестве единой концепции логики вообще) оказалось неправомерным. Во многих случаях использование ее дало лишь чисто иллюстративный эффект, породило парадоксальные ситуации и тупики. Так что ближе к истине будет оценка классической математической логики лишь как одного из средств логической теории научных знаний и, при условии соответствующих интерпретаций, как одного из ее разделов. В результате критики концепции универсальности логики по тем направлениям, о которых упоминалось выше, рухнула концепция, согласно которой классическая логика одинаково пригодна для решения всех проблем логической теории научных знаний (и «универсальна» в этом смысле). Разработка логики по этим направлениям, однако, есть разработка новых разделов универсальной логики.

§ 14. Логические исчисления

Существенное место в логической теории научных знаний в наше время занимает использование логических исчислений (формальных построений). Это использование идет по двум линиям. Первая из них — экспликация элементов интуиции. При этом имеют место интуитивное понимание некоторых видов знаний, логическое исчисление и интерпретация последнего, устанавливающая его соответствие с первым. Если непосредственного совпадения не получается, то исчисление либо приспосабливается к интуитивным предпосылкам путем введения дополнений, ограничений и т. п., либо строится с таким расчетом, чтобы указанное соответствие имело место. Получающиеся таким методом теоретические построения дают решение лишь отдельных проблем, причем решение частичное и порой с «парадоксальными» (не соответствующими интуитивному пониманию) следствиями, что не отвергает их познавательной ценности (возможность использования дедукции и предвидения, доказательность, экспликация понятий, исключение двусмысленности, простота и т. п.). По второй линии логические исчисления рассматриваются независимо от интуиции, как нечто вновь изобретенное логикой в дополнение к тем логическим средствам, которые уже выработаны в науке. В обоих случаях они суть лишь способы определения логических операторов, способы установления классов логических правил, относящихся к этим операторам. Без них в принципе можно обойтись, конструируя сразу теории в соответствующих разделах логики по общим правилам построения теорий.

Глава вторая

ЗНАКИ. ТЕРМИНЫ

Все то, что мы выше перечислили в качестве элементов языка науки, есть совокупность различного рода знаков или конструкций, так или иначе построенных из знаков. Анализ языка науки поэтому будет естественно начать с выяснения того, что такое знаки и какими они обладают свойствами независимо от их физической природы и сферы употребления.

Чтобы сделать некоторые формулировки по возможности компактнее и обозримее, будем в дальнейшем употреблять символы $\cdot$, :, $\vee$, $\sim$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Если X, Y, X^1, ..., X^n суть какие-то утверждения, то эти символы будут читаться вместе с ними так:

1) $X^1 \cdot X^2 \cdot \ldots \cdot X^n$ — «X^1 и X^2 и... и X^n», «Каждое из X^1, X^2, ..., X^n»; в частности, $X \cdot Y$ — «X и Y»;

2) $X^1 : X^2 : \ldots : X^n$ — «Либо X^1, либо X^2, ..., либо X^n», «Одно и только одно из X^1, X^2, ..., X^n»; в частности, $X : Y$ — «Либо X, либо Y»;

3) $X^1 \vee X^2 \vee \ldots \vee X^n$ — «X^1 или X^2 или ... или X^n», «По крайней мере одно из X^1, X^2, ..., X^n»; в частности, $X \vee Y$ — «По крайней мере одно из X и Y»;

4) $\sim X$ — «Не-X», «Не так, как говорится в X».

5) $X \rightarrow Y$ — «Если X, то Y»;

6) $X \leftrightarrow Y$ — «X, если и только если Y»; сокращение для $(X \rightarrow Y) \cdot (Y \rightarrow X)$.

Для выделения и различения определений, аксиом и теорем будем употреблять соответственно буквы D, A и T с порядковыми индексами.

§ 1. Предметы

Слово «предмет» мы будем употреблять в самом широком смысле: предмет — все то, что может быть как-то воспринято, представлено, названо и т. п. исследователем, короче говоря, — все, что угодно: атом, корова, вселенная, любовь, тот факт, что число четыре делится на два, бог, мировоззрение, способность растворяться в воде и т. п. Предметы будем изображать символами $П$, $П^1$, $П^2$, ...

§ 2. Выбор предметов

Мы допускаем, что наш исследователь обладает изначальной способностью выделять или выбирать предметы, т. е. способностью «сосредоточить на них свое внимание». Термин «выбор предметов» (выбор) мы здесь принимаем как первичный, разъясняемый лишь на уровне обычного языка и с помощью примеров. Исследователь выбирает некоторый предмет, если видит, слышит, представляет, воображает и т. п. его, употребляет его название, что-то говорит о нем, создает или разглядывает его схему, рисунок, фотографию и т. п. Так, исследователь выбирает электрон, разглядывая его след на фотопластинке; выбирает флогистон, заявляя, что флогистон не существует; выбирает тройку чисел x, y и z, записывая равенство $x + y = z$ и т. п.

Выбор предметов есть элементарное познавательное действие исследователя. Это всегда есть какое-то состояние его природного аппарата отражения. Наглядно это можно представить так: на отражательном табло исследователя есть особая секция выбора, и если он выбрал некоторый предмет, то в ней зажглась определенная лампочка.

Допускаем также, что исследователь умеет различать и отождествлять выбираемые предметы и никаких затруднений на этот счет не испытывает.

Читатель не должен, однако, воспринимать эти допущения как сильную идеализацию в смысле улучшения природных способностей человека. Они означают лишь отвлечение от соответствующей проблематики, и только. Если наш исследователь не будет в состоянии отличить корову от табуретки, то это никак не скажется на той стороне его деятельности, которую мы здесь рассматриваем. Вопрос о том, что считать тождественным и что считать различным, не является решенным раз и навсегда. И уж во всяком случае он не является вопросом, подлежащим компетенции логики. Что касается первого допущения, то его можно ослабить так: имеются случаи, когда такая возможность имеется, и только эти случаи мы будем иметь в виду.

Выбор предмета может быть результатом воздействия предмета на исследователя (например, в случае зрительного или слухового его восприятия). Но исследователь может выбрать несуществующий предмет (употребив, например, выражение «круглый квадрат») или предмет, непосредственно не воспринимаемый, благодаря природной способности создавать в своем отражательном аппарате некоторые состояния.

§ 3. Сопоставление предметов

*D*1. Если исследователь выбирает два или более различных предмета, будем говорить, что он сопоставляет эти предметы (или осуществляет их сопоставление).

Сопоставление предметов, очевидно, есть совокупность из двух или более различных актов выбора. Последние могут быть осуществлены одновременно или в какой-то последовательности. Мы допускаем, что у исследователя имеется какая-то способность, которая позволяет объединять два и более различных акта выбора в один сложный акт сопоставления. Во всяком случае мы всегда можем сами выделить некоторые акты выбора из множества актов выбора, осуществляемых исследователем, и рассматривать их как нечто единое. Так что приведенное допущение не является обязательным. Оно лишь несколько облегчает усвоение такой весьма абстрактной операции, как сопоставление. Например, построив высказывание «Вода образуется путем соединения кислорода и водорода», исследователь выбрал воду, кислород и водород; то, что эти акты выбора образуют сопоставление трех предметов, усматривается из факта построения одного высказывания о них. Но это объединение можно считать не обязательным. Исследователь может просто произнести слова «кислород», «водород» и «вода», не объединяя их в одно высказывание. Тем самым он осуществит чистое сопоставление трех предметов без построения высказывания, которое есть уже другое действие, отличное от сопоставления (оно включает в себя сопоставление, но не сводится к нему).

Сопоставление предметов есть точно так же действие, локализованное во времени, и есть какие-то показатели, что оно осуществилось или не осуществилось. Сопоставляемые предметы могут быть выбраны независимо от акта их сопоставления. Сопоставление предметов есть проявление воли исследователя. Последний может сопоставлять любые предметы по своему усмотрению. Сопоставление не следует смешивать со сравнением. При сравнении предметов всегда имеет место сопоставление, но не всегда наоборот (в приведенном выше примере сопоставления кислорода, водорода и воды никакого их сравнения не осуществляется).

§ 4. Соответствие предметов

*D*1. Пусть каждый раз, когда исследователь выбирает $П^1$, он вслед за этим выбирает $П^2$, будучи поставлен перед необходимостью выбрать какой-то предмет из некоторой совокупности предметов, среди которых имеется $П^2$ (или будучи поставлен перед альтернативой выбирать или не выбирать $П^2$). Будем в таком случае говорить, что исследователь установил соответствие предмета $П^2$ предмету $П^1$ (или что предмет $П^2$ соответствует предмету $П^1$ с точки зрения данного исследователя; или что предмету $П^1$ поставлен в соответствие предмет $П^2$ некоторым исследователем).

Примеры соответствия. Ребенок установил соответствие отца звуку «папа», если каждый раз, когда его просят показать папу, он, услышав звук «папа» (и выбрав этот звук как особый предмет) и получив приказание выбрать какой-то предмет из числа окружающих его предметов («покажи!»), выбирает именно отца (т. е. другой предмет, физически отличный от звука «папа»). Гардеробщик установил соответствие определенного крючка на вешалке определенному номерку, если умеет каждый раз по данному номерку найти этот крючок на вешалке (когда требуется, например, выдать пальто). Переводчик с русского на английский выбирает слово «hat» вслед за выбором слова «шляпа» каждый раз, когда нужно русскую фразу со словом «шляпа» перевести на английский язык.

Если установлено соответствие одного предмета другому, то это не означает, что они всегда выбираются совместно. Каждый из них может быть выбран и независимо от другого. Более того, если такая возможность отсутствует, то ни о каком соответствии и речи быть не может. Эта независимость является условием того, что предмету $П^1$ могут быть поставлены в соответствие различные предметы $П^2$, $П^3$, ..., и сам $П^1$ в свою очередь может быть поставлен в соответствие другим предметам.

Важно иметь в виду, что если установлено соответствие предмета $П^2$ предмету $П^1$, то это не означает, что верно утверждение: если выбирается $П^1$, то выбирается $П^2$. Будет верно лишь утверждение вида: если выбирается $П^1$, то при условии X выбирается $П^2$, где X означает, что как-то задана область предметов, из которых должен быть выбран некоторый предмет (как-то ориентировано внимание исследователя), и возникла необходимость или желание осуществить выбор (выбор обязательно произойдет). Если условие X отсутствует, то выбор $П^2$ вслед за выбором $П^1$ может не осуществиться.

Соответствие предмета $П^2$ предмету $П^1$ не существует само по себе, независимо от исследователя и без него. Это есть способность исследователя осуществлять определенные действия: выбирать строго определенные предметы вслед за выбором других предметов, если сложились условия, заставляющие делать выбор (т. е. способность воспроизводить определенные сопоставления).

С точки зрения соответствия предметы выступают как неизменные и не влияющие друг на друга (или их изменения и взаимные влияния не принимаются во внимание). Соответствие вообще устанавливается между устойчивыми и практически не влияющими друг на друга предметами. Иначе оно теряет смысл и становится практически неосуществимым. В самом деле, если вы, сдав пальто гардеробщику, получите изменяющийся номерок, то вы рискуете вместо своего пальто получить чужое или вообще ничего не получить. Конечно, неизменность, о которой идет речь, ограничена лишь рамками отождествления предметов. Так, в случае с номерком неизменной должна оставаться только изображенная на нем цифра, тогда как вы без особого риска можете номерок погнуть и даже отломить кусочек.

Случай соответствия предмета самому себе исключается, поскольку по определению для соответствия необходимы два различных предмета. Это могут быть экземпляры предметов одного и того же вида, но они должны как-то различаться по положению в пространстве и времени. Мы можем, например, поставить в соответствие слову «стол» само же это слово «стол»; но это будут различные экземпляры одного вида слов (у нас здесь они занимают разное положение в пространстве).

Соответствие предметов не имеет ничего общего с причинной связью предметов. Причинная связь предметов не зависит от того, познает их некоторый исследователь или нет, в то время как соответствие не существует без отражения предметов исследователем (оно устанавливается по его воле). В случае причинной связи интерес представляет зависимость существования одних предметов от существования других, зависимость наличия свойств у одних предметов от наличия свойств у других предметов или других свойств у тех же предметов и т. п. В случае соответствия это исключается в той мере, в какой это необходимо для идентификации и узнавания предметов. Исследователь может установить соответствие между предметами, находящимися в причинной связи, или найти какие-то причинные связи между предметами, находящимися в соответствии. Но это не отменяет того, что сказано выше.

Соответствие устанавливается как решение исследователя считать, что один предмет соответствует другому (и совершать определенные поступки в подходящих условиях вследствие этого своего решения) как стихийно сложившаяся привычка, как навязанная другими исследователями необходимость и т. п. Но во всех случаях это есть образование у исследователя способности осуществлять определенные действия, и не более того.

§ 5. Виды соответствия

Мы рассмотрели простейший случай соответствия. Через него определяются другие его формы.

*D*1. Предметы $П^1$ и $П^2$ взаимно соответствуют друг другу (имеет место их взаимное соответствие), если и только если каждый из них соответствует другому.

*D*2. Предмет $П^2$ однозначно соответствует предмету $П^1$, если и только если $П^2$ соответствует предмету $П^1$ и никакой другой $П^3$ не соответствует предмету $П^1$.

*D*3. Предметы $П^1$ и $П^2$ взаимнооднозначно соответствуют друг другу, если и только если первый однозначно соответствует второму, а второй — первому.

В нашу задачу не входит рассмотрение различных видов соответствия. Ограничимся сказанным. Важно постоянно помнить в дальнейшем, что какие бы сложные формы соответствия мы ни брали, это всегда будут свойства исследователя производить определенные акты выбора вслед за другими в некоторых заданных условиях. Предметы сами по себе (без исследователя) ни в какое соответствие не вступают. Без исследователя они вступают во взаимоотношения иного рода.

§ 6. Знак

*D*1. Пусть исследователь специально создает, отбирает, воспроизводит и т. п. предмет $П^1$ для того, чтобы он находился во взаимном соответствии с $П^2$, и только. Другими словами, исследователь навязывает предмету $П^1$ одну-единственную роль — роль предмета, находящегося во взаимном соответствии с $П^2$. Будем в таком случае говорить, что $П^1$ является знаком для $П^2$, а $П^2$ является обозначаемым для $П^1$ (с точки зрения исследователя, конечно). Выражения «Предмет $П^1$ обозначает предмет $П^2$» и «Предмет $П^2$ обозначается предметом $П^1$» суть лишь литературные вариации сказанного выше. Примеры знаков общеизвестны. Наиболее употребимые знаки — слова языка, жесты, знаки, регулирующие движение транспорта, и т. д.

Знаки различаются или не различаются физически, т. е. по их видимому, слышимому и т. д. (воспринимаемому) виду. Если знаки считаются физически тождественными, они суть экземпляры (повторения, воспроизведения) одного и того же знака. Например, слово «стол» и слово «стол» суть экземпляры одного и того же знака, если мы не обращаем внимания на их различия.

Из определения знака следует, что если некоторый предмет считается знаком (называют знаком), то должна иметься возможность выбрать другой предмет, обозначаемый им. Без обозначаемого нет знака, как нет обозначаемого без знака, подобно тому как один человек может считаться начальником лишь при том условии, что другой может быть назван его подчиненным. Речь здесь идет лишь о том, что некоторый предмет есть знак лишь для какого-то другого предмета. И если отвлекаются от предметов, обозначаемых данными знаками, последние при этом рассматриваются уже не как знаки, а просто как особого рода предметы (с другой точки зрения).

Кроме того, что знаки находятся в соответствии с обозначаемыми предметами, они имеют и другие свойства. Но в качестве знаков они берутся исключительно с точки зрения их места в соответствии. На роль знаков отбираются удобные для этой цели предметы, а не любые (в частности, легко воспроизводимые, дешевые и т. п.). Каждый знает, например, что воспроизводить слово — дело сравнительно простое, а дешевизна слов превосходит дешевизну даже картошки. Со временем лишь определенного вида предметы становятся знаками профессионалами (подобно тому как определенного вида вещи становятся деньгами). И привычка связывать слово «знак» не только с функцией предметов, но и с их воспринимаемым видом приводит к тому, что знаками начинают называть и знакоподобные предметы (какие-то линии на бумаге, звуки и т. п.).

Обозначаемые предметы могут не существовать и быть недоступными непосредственному восприятию. Но знаки должны быть предметами, которые могут непосредственно восприниматься теми, для кого они предназначены, т. е. должны существовать эмпирически и быть доступными слуху, зрению, осязанию. Знаки, которые невозможно увидеть, услышать и т. п., — нонсенс. Знак всегда есть нечто ощутимое, а не идеальное.

Образование знаков всецело зависит от исследователя, от его волевого решения. Предметы становятся знаками не в силу каких-то обстоятельств, заложенных в них самих, а по воле и желанию исследователя. Если имеется в виду два или более различных исследователя, то помимо решения одного из них считать некоторые предметы знаками требуется на это согласие других, т. е. аналогичное решение других. Тот факт, что одни люди и одни поколения людей навязывают другим людям и поколениям определенный способ обращения с какими-то предметами как со знаками, сути дела не меняет.

Знаки отличаются от чувственных образов предметов: последние суть состояния исследователя, суть состояния его природного отражательного аппарата, тогда как первые суть предметы, находящиеся вне исследователя, существующие наряду с ним, отделимые от него. Они играют определенную роль в жизни и деятельности исследователя, создаются и используются им, но не являются его собственными состояниями. Совокупность знаков и правил оперирования ими образует знаковый (или искусственный) аппарат отражения. Очевидно, он невозможен без природного (естественного, чувственного) аппарата отражения.

Из определения соответствия и знака следует, что предмет не может быть знаком самого себя. Но имеются случаи, когда различение обозначаемых предметов и их знаков является делом довольно тонким и запутанным. В частности, это имеет место тогда, когда знаки рассматриваются сами как особые предметы (а не в их функции знаков), а для обозначения их при этом используются сами эти знаки. Еще менее заметно различие знаков и обозначаемых в тех случаях, когда в качестве знака для предметов некоторого рода может быть выбран представитель этого же рода (например, в качестве знака для чисел 1, 1, I, I, «один», «единица» и т. д. может быть выбрано любое из этих чисел, так что сами числа оказываются экземплярами своего собственного знака). Мы допускаем, что различие знаков и обозначаемых во всех случаях может быть строго установлено.

§ 7. Значение знака

Знаки будем обозначать символами $З$, $З^1$, $З^2$, ...

*D*1. Пусть $З$ есть знак для $П$. Предметное значение $З$ состоит в том, что он обозначает именно $П$. Другими словами, на вопрос о том, каково предметное значение знака $З$, исследователь должен каким-то способом нам указать, что́ именно (какой предмет) этот знак обозначает. Вместо выражения «предметное значение» в дальнейшем для краткости будем употреблять слово «значение».

Значением знака $З$ является не предмет $П$, не «мысли», которые могут появиться в голове исследователя при оперировании $З$, а лишь то, что он обозначает $П$, и исследователю это известно.

Исследователь на вопрос «Каково значение $З$?» может ответить различными способами: указать на воспринимаемые предметы, описать предметы совокупностью слов, изобразить посредством жестов, рисунков и т. п., построить определение понятия, указать правила оперирования знаком в различных ситуациях (контекстах) и т. п. Но все это касается способов установления значения $З$, а не определения смысла самого выражения «значение знака $З$».

Напоминаем, что мы (читатель и автор) наблюдаем какого-то исследователя N, который употребляет знак $З$. Мы видим, что этим знаком он обозначает предметы $П$. Например, N употребляет знак, имеющий вид «лотс», и мы замечаем, что этим знаком N называет столы (т. е. предметы, которые мы обозначаем словом «стол» или видим и узнаем как столы). Вопрос «Каково значение знака *З*?» правильно должен быть поставлен так: для каких предметов знак *З* служит у исследователя *N* знаком (какие предметы *N* обозначает этим знаком)? И ответ на него будет таким: значение знака *З* для исследователя *N* состоит в том, что *З* служит у *N* знаком для предметов *П* (*N* обозначает этим знаком предметы *П*). Например, значение знака «лотс» для *N* состоит в том, что этим знаком *N* называет столы. Важно понять, что термин «значение» нельзя рассматривать как название какого-то предмета (предмета, обозначаемого знаком; мыслей, возникающих в голове исследователя, и т. п.) на тех же основаниях, на каких рассматриваются термины «стол», «треугольник», «атом» и т. п. Это — предикат (или даже часть предиката), вводимый как сокращение описания некоторой ситуации, в которой употребляются знаки.

Выражение «значение знака» теперь вводится как обобщение выражений вида «значение $З^i$».

Знак имеет значение для данного исследователя, если он может каким-то способом выбрать из множества предметов (выделить чувственно или описать с помощью других имеющих значение знаков) по крайней мере один такой, который находится в соответствии с этим знаком. Если он не в состоянии осуществить это, знак для него не имеет значения. И тогда он вообще для него не знак. Выражение «знак не имеет значения» равносильно выражению «то, что исследователь считал знаком, не есть знак», а выражение «знак имеет значение» — выражению «это есть знак».

Известны случаи, когда один и тот же предмет вида *З* является знаком для одних предметов с точки зрения одних исследователей и знаком для других предметов с точки зрения других исследователей. В таких случаях говорят о «многозначности» знака. Мы такие случаи исключаем, т. е. допускаем: знак имеет одно и только одно значение; в указанных выше случаях употребляются различные знаки; в принципе всегда можно установить, что *З* играет роль различных знаков для различных исследователей.

§ 8. Отношения знаков

*D*1. Знак $З^1$ включается по значению в $З^2$, если и только если любой предмет, обозначаемый $З^2$, обозначается $З^1$. Сокращенно будем это записывать символом

$$З^1 \rightarrow З^2$$

Например, знак «число» включается по значению в знак «простое число».

$D2$. Знаки $З^1$ и $З^2$ тождественны по значению, если и только если каждый из них включается по значению в другой, т. е.

$$(З^1 \rightarrow З^2) \cdot (З^2 \rightarrow З^1).$$

Сокращенно будем это записывать символом

$$З^1 \rightleftharpoons З^2.$$

Например, знаки «квадрат» и «прямоугольный ромб» тождественны по значению.

$D3$. Область значения $З$ есть множество всех возможных знаков, в каждый из которых он включается по значению. Другими словами, если $З \rightarrow З^i$, то $З^i$ есть элемент области значения $З$.

Обращаем внимание на то, что, согласно $D3$, областью значения знака являются не обозначаемые им предметы, а знаки же. Например, область значения слова «город» образуют не города, а слова «столичный город», «промышленный город», «Москва», «украинский город» и т. п.

$D4$. Знак $З^1$ будем называть общим (или родовым) относительно знака $З^2$, а $З^2$ — частным (или видовым) относительно $З^1$, если и только если

$$(З^1 \rightarrow З^2) \cdot \sim (З^2 \rightarrow З^1).$$

Например, знак «треугольник» является общим относительно знака «прямоугольный треугольник», а второй — частным относительно первого.

$D5$. Знак $З$ будем называть индивидуальным (предельно частным), если и только если невозможен такой $З^i$, что

$$(З \rightarrow З^i) \cdot \sim (З^i \rightarrow З)$$

(т. е. если и только если он не может быть родовым). Пример индивидуального знака — выражение «Русский поэт М. Ю. Лермонтов, убитый на дуэли в 1841 г.».

$D6$. Знак $З$ называется предельно общим, если и только если невозможен такой $З^i$, что

$$(З^i \rightarrow З) \cdot \sim (З \rightarrow З^i)$$

(т. е. если и только если он не может быть видовым). Пример такого знака — слово «предмет» (в нашем понимании).

*D*7. Знаки $З^1$, $З^2$, ..., $З^n$ ($n \geqslant 2$) совместимы по значению, если и только если возможен такой $З$, что

$$(З^1 \to З) \cdot (З^2 \to З) \cdot \ldots \cdot (З^n \to З)$$

(т. е. возможен такой знак, в который они все включаются по значению). Пример совместимых знаков — слова «писатель» и «драматург» (оба они включаются по значению в слово «А. С. Пушкин»).

*D*8. Знаки $З^1$, $З^2$, ..., $З^n$ ($n \geqslant 2$) сравнимы по значению, если и только если возможен такой $З$, что

$$(З \to З^1) \cdot (З \to З^2) \cdot \ldots \cdot (З \to З^n)$$

(т. е. возможен такой знак, который включается во все эти знаки по значению). Пример сравнимых знаков — слова «поэт» и «прозаик» (слово «писатель» включается в каждое из них по значению). Примером сравнимых знаков являются и слова «число» и «действительное число», поскольку слово «число» включается по значению в каждое из них.

*D*9. Деление $З$ по значению есть множество всех возможных несовместимых по значению знаков $З^1$, ..., $З^n$ ($n \geqslant 2$) из области значения $З$. Знаки $З^1$, ..., $З^n$ называются элементами деления $З$. Пример деления знака: слово «треугольник» делится по значению на знаки «прямоугольный треугольник», «остроугольный треугольник» и «тупоугольный треугольник».

*D*10. Объем $З$ по значению есть множество всех возможных индивидуальных знаков из области значения $З$. Знак $З^i$ есть элемент объема $З$ по значению, если и только если он есть индивидуальный знак из области значения $З$.

Из принятых определений получаются следствия. Приведем некоторые из них.

*T*1. $З \to З$, $З \rightleftharpoons З$

*T*2. Если $З^1 \to З^2$, то $З^1$ и $З^2$ совместимы и сравнимы по значению. Совместимость усматривается из того, что $З^1 \to З^2$ и $З^2 \to З^2$, а сравнимость — из того, что $З^1 \to З^1$ и $З^1 \to З^2$.

*T*3. Если $З^1$ есть элемент деления $З^2$, то $\sim (З^1 \to З^2)$ (т. е. элемент деления знака есть всегда видовой знак по отношению к делимому знаку).

*T*4. Индивидуальный знак не имеет деления (неделим).

*T*5. Если $З^1$ есть элемент области значения индивидуального знака $З^2$, то $З^1 \rightleftharpoons З^2$ (т. е. объем индивидуального знака равен единице).

Примем, далее, следующие утверждения, которые представляются очевидными:

*A*1. $(З^1 \rightharpoonup З^2) \cdot (З^2 \rightharpoonup З^3) \to (З^1 \rightharpoonup З^3)$

*A*2. Если каждый элемент области значения $З^2$ есть элемент области значения $З^1$, то $З^1 \rightharpoonup З^2$.

*T*6. $(З^1 \rightleftharpoons З^2) \cdot (З^2 \rightleftharpoons З^3) \to (З^1 \rightleftharpoons З^3)$

*T*7. Если $З^1 \rightharpoonup З^2$, то каждый элемент области значения $З^2$ есть элемент области значения $З^1$. Теорема усматривается из того, что если $З^3$ есть элемент области значения $З^2$, то $З^2 \rightharpoonup З^3$, и по *A*1 получаем $З^1 \rightharpoonup З^3$.

*T*8. Если $З^1 \rightharpoonup З^2$ и при этом $З^3$ есть элемент объема $З^2$, то $З^3$ есть элемент объема $З^1$ (следует из *T*7).

*T*9. Если $З^1$ есть элемент из области значения $З^2$, а $З^3$ есть элемент объема $З^1$, то $З^3$ есть элемент объема $З^2$. Теорема усматривается из того, что $З^2 \rightharpoonup З^1$ и $З^1 \rightharpoonup З^3$.

*T*10. Если каждый элемент объема $З^2$ есть элемент объема $З^1$, то $З^1 \rightharpoonup З^2$. Теорема следует из *T*9 и *A*2.

*D*11. Предмет, обозначаемый индивидуальным термином, есть индивид.

*D*12. Предмет, обозначаемый индивидуальным термином из области значения данного знака, есть индивид из области значения этого знака.

*D*13. Множество индивидов из области значения знака есть предметная область данного знака.

*T*11. Тождественные по значению знаки тождественны по объему.

*T*12. Тождественные по значению знаки имеют одинаковую область значения.

*T*13. Предметные области тождественных по значению знаков совпадают.

§ 9. Простые и сложные знаки

По своей структуре знаки разделяются на простые и сложные. При образовании сложных знаков из простых обычно происходит изменение последних, так что требуется некоторый навык для установления того, из каких знаков построен данный сложный знак. Мы допускаем наличие такого навыка, что равносильно допущению того, что сложный знак есть упорядоченная во времени и пространстве совокупность четко локализованных знаков. Если вид знаков при соединении их в сложный знак меняется настолько, что теряется физическое тождество с отправным материалом, то должны быть приняты соглашения об отношении значений исходных знаков и их модификаций в составе сложного знака как физически различных знаков.

Мы, таким образом, допускаем, что простые знаки неизменны, в какие бы комбинации и связи они ни вступали.

Простые знаки соединяются в сложные по каким-то правилам, и в сложном знаке имеется нечто такое, что указывает на них: это — близость и порядок знаков в пространстве и времени, а также какие-то дополнительные предметы, образующие с соединяемыми знаками некоторое физическое целое. Будем эти дополнительные предметы называть знакообразующими операторами. Например, из знаков «число» и «делится на два» посредством знакообразующего оператора «которое» получается новый знак «число, которое делится на два».

Мы допускаем, что если встречаются случаи, когда одного только пространственно-временного расположения знаков достаточно для образования нового знака, то для этих случаев всегда может быть найден знакообразующий оператор, играющий ту же самую роль, т. е. допускаем, что знакообразующие операторы всегда четко локализованы и видны в сложном знаке. И это допущение вполне отвечает практике оперирования знаками, когда исследователь умеет установить строение знака, какой бы физический вид он ни имел.

Знаки, которые образуются путем соединения других знаков, можно разбить на две группы:

1) знаки, значение которых известно, если известно значение знаков, из которых они построены;

2) знаки, значение которых невозможно установить, если известно только значение знаков, из которых они построены. В обоих случаях правила соединения знаков предполагаются известными. Например, слова «килограммометр» и «динамометр» построены каждый из двух различных слов. Но первое означает результат некоторых операций измерения и умножения величин, а второе — прибор для измерения некоторых величин. И это их значение невозможно установить, если известны только значения их составных частей и соответствующее правило словообразования.

Таким образом, надо различать:

1) правила соединения знаков в новые знаки, не зависящие от особенностей тех или иных знаков как материальных тел и позволяющие получать знаки первой группы;

2) правила соединения знаков как особых материальных тел (звуков, линий на бумаге и т. п.).

Приведенные выше в примере слова построены по одному и тому же правилу русского языка (по правилу второй группы), но они не являются знаками, построенными по правилам первой группы.

Учитывая сказанное, примем определение:

*D*1. Знаки будем называть структурно сложными (простыми), если они расчленяются (не расчленяются) на другие знаки и знакообразующие операторы.

Структурно сложные знаки будем изображать символами типа

$$\{\alpha;\ З^1, \ldots, З^n\},$$

где $З^1, \ldots, З^n$ $(n \geqslant 1)$ суть знаки, а α означает, что этот знак построен посредством каких-то знакообразующих операторов. Если $n = 1$, то сложный знак имеет вид $\{\alpha;\ З\}$.

Знаки и знакообразующие операторы определенным образом упорядочены в сложном знаке. Но введенный выше символ этого не отражает. Он фиксирует лишь состав сложного знака, и этого пока вполне достаточно.

Мы не даем определения знакообразующего оператора по той причине, что это определение может быть дано лишь путем перечисления этих операторов и указания свойств каждого из них. В дальнейшем мы это сделаем частично. А пока примем следующее допущение:

1) для установления значения сложного знака достаточно знать значение всех входящих в него простых знаков и свойства всех входящих в него операторов;

2) если таким способом значение некоторого данного знака установить нельзя, он принимается как простой по структуре.

$$A1.\ \sim(З \rightarrow \{\alpha;\ З\}) \cdot \sim(\{\alpha;\ З\} \rightarrow З)$$

$$A2.\ \sim(З^i \rightarrow З^k) \rightarrow \sim(З^l \rightleftharpoons \{\alpha;\ З^1, \ldots,\ З^n\}),$$

где α не пусто; $n \geqslant 2$; $i = 1, \ldots, n$; $k = 1, \ldots, n$; $i \neq k$; $l = 1, \ldots, n$.

$$A3\ (З^1 \rightleftharpoons З^2) \rightarrow (З \rightleftharpoons З\,(З^1/З^2)),$$

где $З (З^1/З^2)$ есть знак, образованный из знака $З$ путем замены входящего в него знака $З^1$ на $З^2$.

Первая аксиома имеет сугубо практический смысл: зачем строить сложный знак, содержащий простой знак и тождественный ему по значению? Но, вообще говоря, сложный знак, тождественный по значению знаку, входящему в него, возможен. Например, построим из знаков «стол» и «письменный стол» с помощью особого оператора сложный знак такой, которым можно обозначить как столы, так и письменные столы. Этот знак будет тождествен по значению знаку «письменный стол». Но сложный знак, построенный с помощью того же оператора из знаков «ученый» и «спортсмен», не будет тождествен по значению ни одному из них. В первом случае эффект получился благодаря тому, что один знак включается по значению в другой, а аксиомой $A2$ это условие исключено.

$D2$. Знак $З^1$ зависит по значению от $З^2$, если и только если для установления значения $З^1$ необходимо знать значение $З^2$.

§ 10. Смысл знаков

Различают смысл и значение знака. Раз простые знаки суть для нас своего рода неделимые, элементарные частицы, то это различие уместно лишь в отношении сложных знаков.

$D1$. Будем говорить, что исследователю известно смысловое значение (или, для краткости, просто смысл) простого знака, если и только если ему известно его значение, и смысловое значение (смысл) сложного знака, если и только если ему известно значение всех знаков, из которых построен этот сложный знак, и известны свойства всех входящих в него знакообразующих операторов. Если исследователю, например, известно значение знаков «число» и «делится на два» и известны правила оперирования оператором «которое», то ему известен смысл знака «число, которое делится на два».

$A1$. Если исследователю известен смысл знака, то ему известно и его значение.

Эта аксиома позволяет рассматривать установление смысла знака как один из способов установления его значения. Например, зная смысл выражения «квадрат, который является круглым», мы знаем его значение: оно обозначает круглый квадрат. И никаким другим способом значение этого выражения установить нельзя, ибо такой предмет не существует не только эмпирически, но и по определениям.

Будет ли верно утверждение, что если известно значение знака, то известен и его смысл? Дело в том, что такое утверждение неопределенно. Пусть дан знак вида $\{\alpha; З^1, ..., З^n\}$. Пусть исследователь знает его значение, но не знает значение какого-то из $З^1, ..., З^n$. По определению ему не известен смысл этого сложного знака. Но он может этот знак взять как простой, и тогда смысл его будет ему известен. Но это есть следствие определения, поскольку смысл простого знака есть его значение.

Знаки по смыслу могут быть тождественными и различными. Тождество $З^1$ и $З^2$ по смыслу будем изображать символом

$$З^1 \equiv З^2,$$

а различие — его отрицанием.

Примем следующее определение тождества знаков по смыслу:

*D*2. Знаки тождественны по смыслу только в силу следующих ниже утверждений *A*2 и *A*3.

*A*2. Если $З^1$ и $З^2$ суть простые знаки, то $(З^1 \rightleftharpoons З^2) \rightarrow \rightarrow (З^1 \equiv З^2)$.

$$A3.\ (З^1 \equiv З^2) \leftrightarrow (З \equiv З\,(З^1/З^2))$$

Примем также утверждения:

$$A4.\ (З^1 \equiv З^2) \cdot (З^2 \equiv З^3) \rightarrow (З^1 \equiv З^3)$$
$$A5.\ (З^1 \equiv З^2) \rightarrow (З^1 \rightleftharpoons З^2).$$

Согласно *D*2, вопрос о том, тождественны или нет два данных знака по смыслу, сводится к вопросу о тождестве и различии по смыслу входящих в них простых знаков. При этом предполагается, что оба знака построены по одним и тем же правилам логики.

$$T1.\ \sim ((З^1 \rightleftharpoons З^2) \rightarrow (З^1 \equiv З^2))$$

Утверждения *A*5 и *T*1 означают, что тождественные по смыслу знаки тождественны по значению, но не всегда наоборот. Например, при определении структурно простого знака $З^1$ через структурно сложный знак $З^2$ мы договариваемся считать $З^1$ и $З^2$ тождественными по значению, но смысл их не одинаков потому, что один из них простой, а другой — сложный. Например, знаки «Простое число» и «Целое число, которое делится только на себя и на единицу» тождественны по значению, но различны по смыслу, если второй рассматривается как сложный знак.

Всегда важно знать, как берется тот или иной знак — как простой или как сложный. Для иллюстрации сложности проблем, связанных со смыслом и значением знаков, обычно привлекают «парадоксы», получающиеся с выражениями «Вечерняя звезда» и «Утренняя звезда». Если рассматривать эти знаки как сложные знаки, построенные из знаков «Вечерняя», «Утренняя» и «Звезда», то они различны по смыслу (если, конечно, различны по значению знаки «Вечерняя» и «Утренняя»). При этом вопрос об отношении их значений пока остается открытым. Если они тождественны по значению (обозначают один и тот же предмет), то мы имеем пример знаков, тождественных по значению, но различных по смыслу. Но если эти два знака заведомо берутся просто как различные названия одного и того же предмета, то они берутся как простые знаки, тождественные по значению. Но в качестве простых знаков они тождественны и по смыслу.

Мы допускаем, что если исследователь некоторый сложный знак не дифференцирует на части, то это для него простой знак. И во всех случаях точно известно, как берется тот или иной знак, — т. е. знак не может быть взят одновременно как простой и как сложный, что согласуется с законом непротиворечивости логики.

§ 11. Категории знаков

Знаки различаются по категориям так, что имеют силу утверждения:

*A*1. Если знак принадлежит к некоторой категории, он не принадлежит ни к какой другой.

*A*2. Если $З^1$ и $З^2$ принадлежат к разным категориям, то $\sim(З^1 \rightarrow З^2)$ и $\sim(З^2 \rightarrow З^1)$. Они также несовместимы по значению.

*T*1. Если $З^1$ и $З^2$ суть знаки разных категорий, то $\sim(З^1 \equiv З^2)$.

Чтобы превратить знаки одной категории в знаки другой категории, требуются особые операторы и комбинации знаков. Знакообразующие операторы теперь можно классифицировать как применимые к знакам одной и той же категории и к знакам разных категорий, как дающие знак той же категории и другой категории и т. д. Например, оператор «который» соединяет лишь знаки разных категорий, тогда как оператор «и» соединяет знаки одной категории (в знаке «вещество, которое растворяется в воде» знаки «вещество» и «растворяется в воде» играют явно разную роль в языке; комбинация «стол, который стул» не есть знак, ибо знаки «стол» и «стул» суть знаки одной категории; зато «стол и стул» есть новый знак, образованный из знаков одной категории).

§ 12. Построение знаков

Если значение некоторого знака устанавливается (знак создается) без использования других знаков, будем такой знак называть простым по построению или исходным; если же значение знака устанавливается путем использования других знаков (хотя бы одного), будем называть его сложным по построению или производным. Очевидно, что простой по построению знак является структурно простым, а структурно сложный — сложным по построению. Но последний может быть структурно простым, так что полного совпадения планов структуры и построения нет. Приведенные выше слова «килограммометр» и «динамометр» являются простыми по структуре, но сложными по построению: их значение разъясняется с помощью других знаков («прибор», «измерение», «величина» и т. п.). Сложные по построению знаки образуются посредством соглашений об отношениях знаков и вновь вводимых знаков по значению.

§ 13. Существование предметов

Вопрос о существовании предметов мы будем рассматривать специально. Здесь же (предполагая, что читатель имеет на этот счет некоторые представления, достаточные для употребления соответствующих слов) сделаем лишь несколько замечаний, чтобы завершить описание круга проблем, связанных со знаками.

Знаки можно рассматривать с точки зрения существования и возможности обозначаемых ими предметов.

*D*1. Пусть *П* есть обозначаемый для *З*. Если *П* существует (не существует), то *З* называется экзистенциально непустым (пустым) знаком. Если $П$ возможен (невозможен), то $З$ называется потенциально непустым (пустым) знаком.

Пустой знак имеет смысл и значение. Например, знак «Человек, который весит тонну» экзистенциально пуст, а знак «Круглый квадрат» и потенциально пуст. Но эти знаки имеют смысл и значение.

Число существующих предметов не всегда определяет характер знака, который их обозначает. Знак может быть пустым, но не индивидуальным. Возможны знаки, которым соответствует только по одному существующему предмету, но которые не являются индивидуальными. Например, знаку «Космонавт Г. Титов» соответствует сейчас только один существующий предмет, но не исключена возможность, что появится другой с таким же именем.

§ 14. Общая теория знаков

Общая теория знаков интересует нас лишь постольку, поскольку все сказанное выше распространяется на знаки языка науки как на частный случай. Но теория знаков может быть развита достаточно детально (и строго) как самостоятельная дисциплина по тем направлениям, о которых сказано выше. При этом важно обратить внимание на такую ее особенность.

Общая теория знаков должна рассматривать любые знаки, отвлекаясь от их физической природы и от той области человеческой жизни, в которой они употребляются. Ее метод — не наблюдение фактически встречающихся знаков (хотя это наблюдение играет роль заказчика, ориентира, подсказчика и т. п.), а исследование логически мыслимых возможностей образования знаков и их логически контролируемых свойств. Если мы, например, приняли аксиому $A2$ из § 9, то без каких бы то ни было наблюдений (путем чисто логических рассуждений) можем сказать, что не может встретиться случай, когда $З^1 \rightleftharpoons З^2$, но $\sim (\{\alpha; З^1\} \rightleftharpoons \{\alpha; З^2\})$. Если нам даны два знака одной категории, из них можно образовать один сложный знак. Чисто логически можно исчерпывающим образом пересмотреть, какие здесь возможны случаи отношения знаков по значению, введя для них особые операторы. И какие бы знаковые образования мы ни взяли, мы не сможем обнаружить оператор такого рода, который не был бы предусмотрен чисто логически в общей теории знаков.

§ 15. Термины

Термины суть знаки, из которых строятся высказывания. Они обладают определенными физическими свойствами, удобными для выполнения этой роли: легкость конструирования и восприятия, общедоступность, возможность неограниченного числа повторений и т. д. Мы эти их свойства предполагаем данными, т. е. принимаем допущение: в каждой области науки известно, какими свойствами должны обладать знаки, чтобы стать ее терминами.

§ 16. Образование терминов

Термины вводятся в употребление (создаются, образуются) различными способами. Не все эти способы могут быть рассмотрены в логике. В частности, такие способы, как указание на предметы, приведение примеров, описание предметов доступными и удобными в той или иной частной ситуации средствами, включение в подходящие контексты и т. п., являются внелогическими. Эти способы в значительной мере ситуационны, т. е. зависят от особенностей исследователя, усваивающего термины, и от случайного стечения обстоятельств. Это вовсе не означает, что эти способы плохие. Часто они бывают гораздо более удобными и эффективными, чем так называемые строгие определения, а в большинстве случаев они вообще достаточны. Мы такие способы предполагаем данными. Это позволит нам выделить такие способы образования терминов, которые вполне описываются в логике (и потому могут быть названы логическими).

Логические способы образования терминов имеют одну особенность: с их помощью из данных терминов и высказываний образуются новые термины или данные термины и высказывания используются при введении новых терминов. Поэтому логические правила, относящиеся к образованию терминов, будут иметь такой вид: если предметы такого-то вида суть термины (или высказывания), то предметы такого-то вида будут терминами. В силу наших определений, рассмотренных в предшествующей главе, эти правила будут вместе с тем означать: если известно значение таких-то терминов, то известно и значение таких-то терминов. Эта особенность логических правил образования терминов базируется на том допущении, что наш исследователь относительно какого-то множества предметов знает, что они суть термины (и высказывания), и применяет эти правила уже к данным терминам (и высказываниям). Короче говоря, наш исследователь действует по принципу: дайте мне термины или высказывания и я построю из них или образую с их помощью новые термины. Если же мы дадим исследователю какие-то предметы, не являющиеся терминами и высказываниями и не дадим ему при этом никаких терминов и высказываний, по нашим правилам он не сможет ввести никакой новый термин.

Операции образования терминов разделяются на две группы:

1) с помощью одних операций из данных терминов (или, возможно, высказываний) образуется новый сложный термин; при этом в состав нового термина не входит никакой предмет, который до образования этого термина не был термином, а после образования стал им; назовем эти операции структурными (или операциями построения);

2) с помощью других операций некоторые предметы (подходящего физического вида), которые до этого не были терминами, становятся терминами благодаря особого рода соглашениям об отношении значений вновь вводимых терминов и данных терминов; эти операции называются определениями (или дефинициями).

В случае операций построения из данных терминов и высказываний образуется некоторый предмет так, что если выполнены соответствующие правила, то этот предмет заведомо есть термин. Здесь предмет становится термином сразу, как только создается физически. В случае операций определения некоторому данному предмету исследователь навязывает роль термина. Будет или нет некоторый предмет термином, здесь зависит от воли и желания исследователя. Здесь предмет, намеченный на роль термина, существует (создается физически) до определения. Но до определения он термином не является. И после определения он становится термином лишь при условии соблюдения правил определения (об этом ниже). Благодаря определениям вводятся простые термины. Как увидим, если вводятся сложные, то при этом все равно вводятся простые.

В дальнейшем мы часто будем употреблять выражения вида «a есть термин». В силу принятых выше соглашений это будет означать, что значение всех терминов, входящих в a, известно и смысл a известен. Термины будем изображать символами вида t, t^1, t^2, ...

Логически возможны (и встречаются на самом деле в науке) следующие определения.

Определение типа I формулируется так: пусть предмет t^1 (предмет, имеющий вид t^1) будет термином таким, что верно утверждение

$$t^1 \rightleftharpoons t^2,$$

где t^2 есть термин. В другой форме: будем считать t^1 термином таким, что $t^1 \rightleftharpoons t^2$ (будем считать t^1 термином, тождественным по значению t^2); будем называть t^2 термином t^1. Сокращенно:

$$t^1 = Df.\ t^2.$$

В этом определении содержатся два решения: 1) считать t^1 термином; 2) считать истинным утверждение $t^1 \rightleftharpoons t^2$. Так что принятие этого определения означает принятие утверждения, указанного в пункте 2.

Определение типа I применяется тогда, когда t^2 есть сложный термин, а t^1 вводится как его сокращение. Иначе оно лишено практического смысла. Термин t^1 называется определяемым, а t^2 — определяющим. Определяемый термин в случае определений I всегда есть простой термин. Пример такого определения: «Медианой называется прямая, соединяющая вершину треугольника с серединой противолежащей стороны». Здесь определяемый термин — слово «медиана», определяющий — «прямая, которая соединяет вершину треугольника с серединой противолежащей стороны». Намерение исследователя считать первое слово термином, тождественным по значению второму, выражено здесь словом «называется».

Определение типа II отличается от определения I тем, что простой термин определяется как часть сложного. Оно формулируется так: пусть предметы t^* и $\{\alpha;\ t^*;\ t^1, \ldots, t^n\}$ (где $n \geqslant 1$) будут терминами такими, что

$$\{\alpha;\ t^*;\ t^1, \ldots, t^n\} \rightleftharpoons \{\beta;\ t^1, \ldots, t^n,\ t_1, \ldots, t_m\}\ \ (m \geqslant 1)$$

Обычно эти определения формулируют либо как определение t^* (и тогда автоматически $\{\alpha;\ t^*;\ t^1, \ldots, t^n\}$ будет термином в силу правил построения), либо как определение $\{\alpha;\ t^*;\ t^1, \ldots, t^n\}$ (и тогда предполагается, что тем самым вводится и t^*). Пример определения типа II: «Доказуемой формулой будем называть формулу, которая есть аксиома данного исчисления или получается из аксиом по правилам вывода этого исчисления». Здесь определяется слово «доказуемая» и одновременно выражение «доказуемая формула»; термин «формула» здесь содержится как в сложном определяемом, так и в определяющем термине; последний, кроме того, содержит другие термины.

Имеется группа терминов, обозначающих свойства (или признаки) предметов, которые могут быть определены только посредством определений типа II. Возьмем, например, термин «остроугольный». Он определяется лишь в связи с терминами, обозначающими предметы, в отношении которых считают возможным его употреблять. Например как часть термина «Остроугольный треугольник». К числу таких терминов относятся многие логические термины: «значение», «истинно», «ложно» и т. п.

Определения типа III имеют такой вид: пусть предмет t будет термином таким, что x, где в x перечисляются термины t^i такие, что

$$t \rightharpoonup t^i$$

и указывается, что

$$\sim (t^i \rightharpoonup t^k) \to \sim (t \rightharpoonup t^k),$$

где t^k есть любой термин, отличный от t^i. Обычно последнее условие формулируют так: t не включается ни в какой другой термин, кроме t^i.

Определения типа III разделяются на две группы. Определения первой группы имеют такой вид: пусть t будет термином таким, что

$$(t \rightharpoonup t^1) \cdot \ldots \cdot (t \rightharpoonup t^n) \cdot ((t \rightharpoonup t^k) \to (t^i \rightharpoonup t^k)),$$

где $n \geqslant 2$, $i = 1, \ldots, n$. Пример такого определения: «действительными числами называются рациональные числа и иррациональные числа». В случае таких определений число n всегда конечно.

Определения второй группы имеют такой вид: предмет t будет термином таким, что

1) $(t \rightharpoonup t^1) \cdot \ldots \cdot (t \rightharpoonup t^n)$
2) $((t \rightharpoonup t_1) \cdot \ldots \cdot (t \rightharpoonup t_m)) \to ((t \rightharpoonup t^{*1}) \cdot \ldots \cdot (t \rightharpoonup t^{*k}))$
3) $(t \rightharpoonup t^j) \to (t^l \rightharpoonup t^j)$,

где $n \geqslant 1$, $m \geqslant 1$, $k \geqslant 1$, t^l есть какой-то из $t^1, \ldots, t^n, t^{*1}, \ldots, t^{*k}$, термины $t^{*1}, \ldots, t^{*k}$ образованы из $t_1, \ldots, t_m$ и, возможно, других терминов или определены через них. Пункт 3 обычно формулируют так: ничто, кроме $t^1, \ldots, t^n, t^{*1}, \ldots, t^{*k}$, не называется t. Пример для таких определений: «Определение пропозициональной формулы: 1) пропозициональные переменные суть пропозициональные формулы; 2) если x и y суть пропозициональные формулы, то $\sim x$ и $x \supset y$ суть пропозициональные формулы; 3) нечто есть пропозициональная формула лишь в силу 1 и 2».

Определения типа IV отличаются от III так же, как определения II отличаются от определения I. Определения типа III и IV называют определениями через перечисление (или индуктивными, рекурсивными).

§ 18. Правила определений

Правила определений у нас получаются как следствия из ранее принятых утверждений и определений.

*T*1. Если принято $t^1 = Df \cdot t^2$, то t^1 и t^2 тождественны по объему, по области значения и по предметной области (правило соразмерности).

*T*2. Если $t = Df \cdot \{\alpha; t^1, \ldots, t^n\}$, то t не входит в $\{\alpha; t^1, \ldots, t^n\}$ (правило недопустимости тавтологии).

Доказательство *T*2. Пусть t встречается среди $t^1, \ldots, t^n$. По условию $\{\alpha; t^1, \ldots, t^n\}$ должен быть термином до определения t, все входящие в него $t^1, \ldots, t^n$ суть термины до построения определения. Но t не является термином до построения его определения, и если t входит в $\{\alpha; t^1, \ldots, t^n\}$, то последнее выражение не есть термин.

*T*3. Если $t = Df \cdot \{\alpha; t^1, \ldots, t^n\}$, то ни один из $t^1, \ldots, t^n$ не определяется через t (правило недопустимости круга).

Доказательство *T*3. Пусть $t^1 = Df \cdot \{\beta; t, \ldots\}$. Согласно *A*2 из § 9 имеем $t \rightleftharpoons \{\alpha; \{\beta; t, \ldots\}, \ldots, t^n\}$. Согласно *A*1 из § 9 $\sim (t \rightleftharpoons \{\alpha; \{\beta; t, \ldots\}, \ldots, t^n\})$.

Аналогично можно получить правила для определений прочих видов.

§ 19. Определения и утверждения

В языке науки определения формулируются в литературно разнообразных видах: с помощью выражений «есть», «будем называть», «если..., то будем считать (называть)...» и т. п.

Но все эти вариации не касаются сути определений: они при всех обстоятельствах суть соглашения считать некоторый предмет термином с таким-то значением.

Определения часто формулируют как высказывания о предметах, а не как соглашения относительно терминов. Это удобно с точки зрения вывода следствий. Однако это ведет к смешению различных логических форм. В высказываниях о предметах все входящие в них термины имеют значение независимо от данных высказываний и до их построения, тогда как в определениях вновь вводимые термины приобретают значение лишь благодаря определениям. Правильнее будет говорить так: из определений получаются высказывания по некоторым правилам (мы их укажем ниже). Придавая определениям вид высказываний о предметах, фактически сразу берут высказывания, получающиеся из определений, которые остаются в таких случаях неявными (имплицитными).

Определение не следует смешивать также с установлением того, может ли данный предмет быть назван некоторым термином или нет. Например, возьмем выражение «Если в жидкость поместить лакмусовую бумажку и она (бумажка) при этом окрасится в красный цвет, то данная жидкость есть кислота». Это выражение можно рассматривать как определение термина «кислота» (мы не говорим здесь о том, удачно это или нет), и тогда более явно эту его функцию выразит фраза «Жидкость, окрашивающая лакмусовую бумажку в красный цвет, называется (будем называть) кислотой». Но его можно рассматривать как один из способов выяснения того, является данная жидкость кислотой или нет; при этом термин «кислота» определен до этой фразы и независимо от нее.

Определения суть решения (и соглашения) считать некоторый предмет термином с таким-то значением. Потому к ним нельзя применять термины «истинно», «ложно» и т. п., уместные в отношении утверждений. Но с другой стороны, из определений получаются следствия, что правомерно лишь для утверждений. Как выйти из этого затруднения?

Затруднение это легко разрешимо, если учесть следующие обстоятельства. Дело в том, что запись (произнесение) определения есть не только принятие упомянутого выше решения, но и констатация того, что решение это принято. Поэтому запись определения имплицитно содержит в себе высказывание о том, что определение такого-то вида принято. И это высказывание истинно, если определение на самом деле принято, и ложно, если оно на самом деле не принято. Но случай ложности здесь, по-видимому, исключен, ибо всегда очевидно, что определение принимается самим актом его записи. И с этой точки зрения определения суть высказывания, из которых можно получать следствия. Кроме того, определения по самому своему содержанию содержат в себе потенциальные утверждения вида $t^1 \rightarrow t^2$. И раз определения приняты, то вводимые термины становятся законными терминами и утверждения такого типа становятся посылками умозаключений на общих основаниях.

Рассмотрим простой пример. Пусть принято определение: «Поэт есть писатель, сочиняющий стихи» (т. е. слово «поэт», по определению, тождественно по значению группе слов «писатель, сочиняющий стихи»). Раз определение принято, будет верно утверждение о том, что слово «поэт» тождественно по значению словам «писатель, сочиняющий стихи». Логически истинно очевидное утверждение, что писатель, сочиняющий стихи, сочиняет стихи. Подставим вместо слов «писатель, сочиняющий стихи», слово «поэт», получим истинное утверждение «Поэт сочиняет стихи». Все это рассуждение проделано в соответствии с правилами логики. И по этому образцу строятся выводы следствий и из научных определений.

§ 20. Имплицитные определения

Иногда (теперь — все чаще и чаще) в науке опускают все то, что связано с исследователем и его намерениями, и сразу записывают следствия из определений в качестве аксиом или постулатов, рассматривая их как утверждения с первичными (определяемыми) терминами. К тому же при этом сразу записывают следствия не как утверждения об отношениях терминов, а как утверждения о предметах, к которым эти термины относятся. Такого рода утверждения рассматривают как имплицитные определения первичных терминов. Например, определение простого числа можно записать как аксиомы «Простое число есть целое число», «Простое число делится без остатка только на себя и на единицу» и «Если число является целым и делится без остатка только на себя и на единицу, то это число является простым» с первичным термином «Простое число».

В случае имплицитных определений всегда в принципе можно восстановить опущенные соглашения, придав им эксплицитный вид (по рассмотренным выше схемам).

§ 21. Определение и выбор

Всякое определение терминов связано с каким-либо способом выбора предметов. Но не всегда выбор предметов, завершающийся введением термина, есть определение. Встречается например, такой способ введения терминов: перечисляются предметы, подобранные так, чтобы у них было единственное сходное свойство; единственность достигается подбором примеров применительно к данным условиям (в частности, к характеру образования читателей), так что число примеров и их вид могут варьироваться; то общее, что у этих приводимых в примерах предметов имеется, обозначается вводимым термином; при этом задача состоит в том, чтобы научить читателя или слушателя осуществить выбор нужного свойства предметов. Но это не есть определение, хотя здесь и вводится новый термин.

Аналогично обстоит дело в тех случаях, когда задаются операции, с помощью которых можно обнаружить или вновь создать некоторый предмет, и вводят термин, обозначающий такой предмет. В этих случаях дело обстоит в принципе аналогично (но лишь несколько сложнее) введению терминов таким способом: «предмет, который вы видите (слышите и т. п.), называется t». Хотя здесь и фигурируют термины, значение которых известно, здесь не устанавливается отношение значений терминов, как в случаях I—IV.

Так что в тех случаях, когда под операционными определениями имеют в виду построение терминов путем описания операций по выбору предметов, то имеют в виду способы введения терминов, отличные от определений терминов в нашем смысле. Мы такие способы предполагаем данными, но их не рассматриваем.

§ 22. Экспликация терминов

Пусть имеется термин t^1, значение которого установлено так, что по тем или иным причинам это не устраивает лиц, нуждающихся в t^1. И пусть при этом ситуация сложилась так, что для него нельзя построить обычное определение через другие термины, значение которых известно, или такого рода определения не устраняют возникших из-за него затруднений (такая ситуация, например, сложилась для терминов «слово» и «предложение» в лингвистике).

Чтобы найти выход из положения, вводят термин t^2, который удовлетворяет всем логическим требованиям к терминологии науки и который вместе с тем может быть использован вместо t^1 в решении каких-то (частично или полностью известных) задач. Термин t^2 здесь выступает как своего рода заместитель термина t^1, и определение его специально подбирается с таким расчетом, чтобы он смог выполнить эту роль заместителя t^1.

Никаких общих логических нормативов для выбора определения t^2 нет. Этот выбор зависит от особенностей той или иной отрасли науки и от характера задач, в которых фигурирует t^1. Никаких гарантий относительно того, что введение t^2 будет удачным, сама по себе рассматриваемая операция не дает. Здесь в общем можно сказать лишь то, что термин t^2 может быть введен всеми доступными данной науке средствами введения терминологии.

Введение термина t^2 принято называть экспликацией термина t^1. Термин t^2 может быть «хуже» термина t^1, поскольку не во всех случаях, когда уместно употребление t^1, он может быть использован без отрицательных последствий или вообще использован. Но он «лучше» t^1 в том плане, что его свойства поддаются логическому контролю и удовлетворяют логическим идеалам. Он выделяет некоторое «частичное» значение t^1, но делает это логически корректно.

Практически редко может случиться так, что эксплицируемый и эксплицирующий термины окажутся тождественными по значению. Обычно эксплицируемые термины бывают расплывчатыми, многозначными и т. п. Так что в результате экспликации удается ввести понятие, совпадающее по значению с эксплицируемым термином лишь в некоторых определенных контекстах. С этой точки зрения экспликация играет роль не только уточнения смысла терминов (что достигается благодаря определению), но также роль выбора (выделения) области исследования.

Вид экспликации терминов, при которой используются термины логики, будем называть логической экспликацией. Разумеется, этот вид экспликации уместен в исключительных случаях, когда для научной терминологии имеются обобщающие их логические знаки. В частности, он возможен для пространственно-временной терминологии, поскольку пространственные и временные отношения суть частный случай отношений, рассматриваемых в логике отношений. Логическая экспликация интересна тем, что позволяет строго разграничить утверждения науки на две группы: 1) утверждения, значения истинности которых можно установить чисто логически (независимо от опыта); 2) утверждения, являющиеся результатом конкретных исследований или допущений в рамках данной науки и проверяемые методами этой науки. Так, осуществив логическую экспликацию терминов в утверждениях «Мир не имеет начала во времени», «Мир имеет начало во времени», «Мир расширяется в пространстве», «Время прерывно», «Время непрерывно» и т. п., мы можем убедиться в том, что они являются внелогическими, т. е. что логика не компетентна принимать их или отвергать. Но зато аналогичная экспликация терминов в утверждениях о возможности или невозможности мгновенных перемещений, об обратимости или необратимости времени и т. п. обнаруживает, что такого рода утверждения должны быть приняты или отвергнуты из чисто логических соображений.

§ 23. Переменные

С целью придать утверждениям логики желаемую общность и вместе с тем точно указать границы их применимости, а также с целью придать этим утверждениям более простой, компактный и обозримый вид в логике используют особого рода предметы, называемые переменными. Переменные употребляются в математике и других науках. Отличие их от логических переменных лишь в том, для каких предметов эти переменные вводятся. В логике они вводятся для терминов, высказываний и логических операторов. Поясним, что это за приспособления.

Возьмем такое заявление: если a и b суть термины, то $a \cdot b$ точно так же будет термином. Это заявление буквально следует читать так: если на место буквы a вписан какой-то термин и на место b вписан какой-то термин, то последовательность, образованная первым термином, точкой и вторым термином, точно так же будет термином. Здесь буквы a и b играют роль предметов, занимающих места терминов (или на место которых могут быть поставлены термины). Кроме того, в комбинации $a \cdot b$ они указывают вид комбинации, которая получится из терминов, подставляемых на место a и b, т. е. указывают определенное место подставляемых терминов в их комбинации. Короче говоря, переменные суть места для терминов (высказываний, логических операторов), обозначенные нами особыми предметами.

Предметы, которые подставляются на место переменных, суть значения переменных. Множество предметов, которые могут быть поставлены на место переменной a, образует область значения переменной a.

Области значения переменных задаются особыми высказываниями (например, «Область значения каждой из переменных a^1, a^2, ... есть множество терминов» или «a и b суть термины»). Подстановка в переменные осуществляется по правилу:

1) на место различных вхождений одной и той же переменной в некоторое выражение подставляется один и тот же (одинаковый) предмет из области значения переменной;

2) на место различных переменных могут быть подставлены различные предметы из области их значения в случае, если области их значения совпадают.

В нашем примере области значения переменных a и b заданы высказыванием «a и b суть термины»; на место a в этом высказывании и в высказывании «$a \cdot b$ будет термином» подставляется один и тот же термин; аналогично для b; на место a и b могут быть подставлены различные термины.

Некоторые предметы вводятся как переменные двумя способами:

1) явно — перечисляются предметы, которые будут играть роль переменных, и указывается область их значения (например, принимается, что буквы a, a^1, a^2, ... суть переменные, область значения которых суть высказывания);

2) неявно — принимаются условные высказывания вида «Если a^1, a^2, ... суть α, то β», где α означает область значения a^1, a^2, ..., а β — некоторое высказывание, содержащее a^1, a^2, ... (в рассмотренном выше примере принимается высказывание «Если a и b суть термины, то $a \cdot b$ есть термин»).

Спрашивается, нельзя ли отношение переменных и предметов из области их значения рассматривать как отношение знаков и обозначаемых? Можно, но лишь соблюдая следующие условия:

1) принимается соглашение, что определенного вида предметы (допустим, буквы a, b, c с индексами и без индексов)

будут терминами, обозначающими такие-то (указывается, какие именно) предметы (допустим, высказывания);

2) принимается, что любой термин, указанный в пункте 1, обозначает любой предмет, указанный в этом соглашении, если этот термин берется отдельно (любая из букв a, b, c с индексами и без индексов обозначает любое высказывание); если же два или более различных термина такого рода употребляются совместно, то различие их означает то, что они могут обозначать различные предметы из заданной предметной области (различие букв a и b, например, в высказывании «$a \cdot b$ есть высказывание» означает то, что высказывания, обозначаемые ими, могут быть различными);

3) принимаемое утверждение, содержащее такого рода термины, снабжается кванторами общности (если X есть такое утверждение, а a^1, a^2, ..., a^n суть все входящие в него термины рассматриваемого сорта, то принимается утверждение «Все a^1, ..., все a^n таковы, что X»); смысл этого пункта станет ясен из дальнейшего (забегая вперед скажем, что он равносилен правилу подстановки в переменные).

При этом важно помнить о различии предметной области и области значения знака. Область значения терминов a, b, c, ..., указанных в пункте 1, образуют не предметы, упомянутые там (в частности, не высказывания), а термины, обозначающие эти предметы (в частности, термины, обозначающие конкретные высказывания). Так что из утверждений с такими терминами в качестве следствий получаются высказывания о терминах, о высказываниях и т. д.

Таким образом, переменные суть термины, но термины особого рода, удовлетворяющие приведенным условиям. Правило подстановки в переменные есть правило выбора предметов, обозначаемых ими.

§ 24. Определения с переменными

Частный случай определений — определения с переменными. Они имеют такой вид: если a^1, ..., a^n ($n \geqslant 1$) суть такие термины, что верны утверждения X, содержащие эти термины, то b будет термином таким, что будут верны утверждения Y, содержащие этот термин. Здесь буквы a^1, ..., a^n, b суть переменные, области значения которых суть термины. Правило для таких определений: в самом определении и в вытекающих из него следствиях на место a^1, ..., a^n

нельзя подставлять b и все те термины, которые зависят от b (содержат b как часть или определяются так, что используется b). Это правило есть следствие имеющегося в самом определении условия, что $a^1, \ldots, a^n$ должны быть терминами независимо от определения b, т. е. b в их число не включается.

§ 25. Понятие

*D*1. Термин, значение которого устанавливается посредством определения (который вводится, создается определением), будем называть понятием.

Очевидно, не всякий термин есть понятие, если даже он является сложным в плане построения. Так $\{\alpha; t^1, \ldots, t^n\}$ не есть понятие. Возможны термины, построенные из понятий, но сами не являющиеся таковыми. Например, термин «10 *кгм/сек*» построен из понятий «число 10», «*кг*», «*м*» и «*сек*», но он не есть понятие, если получен как результат замены высказываний с терминами «*a кг*», «*b м*» и «*c сек*» на высказывание с этим термином.

*D*2. Содержание понятия t^1 в случае определения $t^1 = Df \cdot t^2$ есть смысл t^2; содержание понятия t в случае определений II—IV есть смысл всех терминов t^i, фигурирующих в определении.

Понятия, фигурирующие в каждой данной области науки, можно разделить на специфические и неспецифические. Специфические в свою очередь разделяются на первичные (не определяемые через другие специфические понятия) и производные (определяемые через другие специфические и, в конце концов, через первичные). Первичные понятия определяются с помощью терминов обычной речи, терминов других наук и даже понятий других наук. Так что абсолютно неопределяемых понятий нет. В аксиоматических теориях первичные понятия «определяются аксиомами». Лишь в формальных построениях употребляются неопределяемые (первичные) «знаки». Но без интерпретации они не имеют значения, т. е. не являются знаками (и, следовательно, терминами).

Из принятых ранее предпосылок следует, что процессы в истории науки, называемые развитием, изменением, борьбой и т. п. понятий, суть процессы специально научные, а не логические. С точки зрения логики, в таких случаях происходит лишь то, что люди начинают употреблять термины в различных смыслах или в новом смысле.

§ 26. Категории терминов

Термины разделяются на две категории: 1) субъекты, 2) предикаты. Мы допускаем, что исследователь в отношении простых терминов умеет определить, к какой категории он принадлежит. Что касается сложных терминов, то правила разделения их по категориям укажем ниже.

В дальнейшем субъекты будем изображать символами

$$s,\ s^1,\ s^2, \ldots,$$

а предикаты — символами

$$P,\ P^1,\ P^2, \ldots.$$

Предметы, обозначаемые субъектами, будем называть объектами, а предметы, обозначаемые предикатами, — признаками объектов. Имеется различие в выборе объектов и признаков: первые могут быть выбраны независимо от вторых, тогда как вторые невозможно выбрать, не выбрав тем самым первые. Так, чтобы выбрать предмет, обозначаемый словом «красный», надо выбрать какой-то (безразлично, какой) объект, имеющий красный цвет; чтобы выбрать предмет, обозначаемый словом «больше», надо выбрать пару каких-то (опять-таки безразлично каких) предметов, из которых один больше другого. Точно так же обстоит дело с существованием, возможностью и т. п. признаков: вопрос о существовании, возможности и т. д. признаков сводится к вопросу о существовании, возможности и т. д. объектов, обладающих этими признаками.

Ни один субъект не есть предикат и ни один предикат не есть субъект. Но из субъектов можно строить предикаты, а из предикатов — субъекты. Например, если дан субъект s, то можно из него построить сложный предикат «Признак, который принадлежит s», а если дан предикат P, то из него можно построить сложный субъект «Объект, имеющий признак P».

§ 27. Энарные термины

В зависимости от числа объектов, которые необходимо выбрать для выбора признака при построении (или при установлении значения) обозначающего его термина, будем говорить об одноместных (одинарных), двухместных (бинарных) и т. д., вообще об энместных (энарных) признаках и, соответственно, предикатах. Так, предикат «красный» (и соответствующий признак) является одноместным, а предикат «больше» (и соответствующий признак) — двухместным. Одноместные признаки называют свойствами, двух- и более местные — отношениями. Отношение, другими словами, есть признак пары, тройки и т. д. (в общем, энки) объектов.

Пару, тройку и т. д. (энку) объектов будем точно так же считать объектом. Термины, обозначающие такие объекты, в свою очередь суть пары, тройки и т. д. (энки) субъектов или энместные (энарные) субъекты. Например, выражение «Тройка предметов: стол, капитализм, тензор» есть тернарный субъект. Примем для таких терминов следующее определение и аксиомы:

*D*1. $(s^1, \ldots, s^n)$ есть энарный субъект, если и только если $s^1, \ldots, s^n$ суть субъекты (правило построения групп субъектов).

$$A1.\ \sim(s^i \rightharpoonup (s^1, \ldots, s^n)) \cdot \sim((s^1, \ldots, s^n) \rightharpoonup s^i) \quad (i = 1, \ldots, n;\ n \geqslant 2);$$

$$A2.\ (s^i \rightharpoonup s^k) \to ((s^1, \ldots, s^n) \rightharpoonup (s^1, \ldots, s^n)(s^i/s^k)) \quad (i = 1, \ldots, n).$$

§ 28. Построение терминов

Правила построения терминов можно записывать в двоякой форме:

1) в форме утверждений вида «Если a есть термин, то b есть термин»;

2) в форме утверждений вида «Если известен смысл термина a, то известен смысл термина b».

Эти две формы записи эквивалентны, поскольку имеет силу положение: если a есть термин, то смысл его известен.

Примером правил построения терминов являются следующие утверждения:

*A*1. Если a есть термин, то $\sim a$ есть термин.

*A*2. Если a и b суть термины, то $a \cdot b$ есть термин.

*A*3. Если a и b суть термины, то $a \vee b$ есть термин.

*A*4. Если a есть термин, то $\tilde{a}$ есть термин.

*A*5. Если a и b суть термины, то $(\cdot/a, b)$ есть термин.

*A*6. Если a и b суть термины, то $(\vee/a, b)$ есть термин.

Построенные по этим правилам термины читаются соответственно так: 1) предмет, который не обозначается термином a (не находится в соответствии с a); 2) предмет, обозначаемый каждым из терминов a и b; 3) предмет, обозначаемый по крайней мере одним из a и b; 4) не-a; 5) каждый из a и b; 6) по крайней мере один из a и b.

Различие терминов, указанных в парах $A1$ и $A4$, $A2$ и $A5$, $A3$ и $A6$, видно из таких примеров. Действие, обозначаемое словом «пить» (a), не обозначается словом «курить» (b), так что имеет место отношение $\sim b \rightarrow a$; но оно не может быть названо словом «не курить» ($\tilde{b}$), так что $\sim (\tilde{b} \rightarrow a)$. Предмет, который является писателем, спортсменом и депутатом, и предмет, называемый выражением «каждый из трех предметов (писатель, спортсмен, депутат)», очевидно, не одно и то же.

§ 29. Сводимость терминов

Термины с точки зрения построения разделяются на исходные и производные следующим образом: термин t^1 является исходным относительно t^2, а t^2 — производным относительно t^1, если и только если t^1 используется при образовании (при установлении значения) t^2. Очевидно, что если t^2 есть сложный термин, содержащий t^1, то t^2 есть производный относительно t^1, а t^1 — исходный относительно t^2. Аналогично отношение t^1 и t^2, если t^1 используется при определении t^2.

Терминология науки фактически складывается так, что отношения терминов оказываются весьма далекими от того, чтобы от одних терминов можно было добраться до других по четко проложенным логическим «тропинкам». Потому возникает одна из важнейших проблем логического анализа научных знаний — проблема сведения научных терминов любого вида и любой степени сложности к простым по построению терминам. Решение этой проблемы можно мыслить двояко: 1) указать способы, посредством которых любой научный термин можно было бы заменить некоторой упорядоченной совокупностью простых по построению терминов; 2) указать способы построения научных терминов, так чтобы были выявлены все связи терминов по значению вплоть до простых по построению терминов. В первом смысле проблема неразрешима, во втором она фактически разрешается в каждой области науки. Причем это разрешение не есть нечто раз и навсегда установленное и единственно возможное. Нет никаких абсолютных критериев простоты и сложности терминов, первичности и производности понятий. Здесь играют роль исторически сложившиеся условия, случайности и постоянные перемены в науках. К одним и тем же целям и результатам могут вести различные совокупности терминов, различные способы их введения, различные системы их взаимоотношений. Поэтому положения логики об отношениях терминов и о способах их построения суть лишь некоторые схемы, с помощью которых можно рассматривать терминологию той или иной области науки в какой-то период ее развития (и вносить, возможно, усовершенствования в терминологический аппарат науки), но отнюдь не рекомендации раз и навсегда установить абсолютно жесткие отношения «простой — сложный», «первичное — производное» и т. п.

Конечно, каждый термин науки в конце концов имеет основу в некоторой совокупности простых по построению терминов. Но «расстояние» от данного термина до этой основы часто бывает настолько далеким (опосредованным), а сам путь — настолько извилистым и разветвленным, что сведение его к этой основе теряет всякий практический смысл. И утверждение о возможности найти для каждого термина такой «основной» эквивалент остается лишь абстрактной возможностью. Попытки осуществить это на деле в достаточно широких масштабах обречены на неудачу. Но это отнюдь не отвергает целесообразности попыток осуществить это для ограниченных областей науки, частично, упрощенно, приближенно и т. д.

§ 30. Термины терминов

Если некоторый предмет есть термин, то это означает, что он выполняет определенные функции в деятельности исследователя, играет определенную роль, употребляется определенным образом. Но термин может сам стать предметом внимания в качестве термина, как это делается, например, в логике. Для него, очевидно, в таком случае должен быть введен какой-то термин. Своеобразие здесь состоит в том, что термином для данного термина является какой-то экземпляр самого этого термина с некоторыми дополнениями или модификациями (кавычки, курсив и т. п.). Условимся термин термина t обозначать символом $[t]$.

$$A1.\ \sim(t \to [t]) \cdot \sim([t] \to t)$$

$A2$. Смысл t не зависит от $[t]$ (т. е. известен до построения $[t]$). Смысл же $[t]$ известен, если и только если известен смысл t.

$A3$. Термин $[t]$ есть субъект.

$D1$. Термины типа $[t]$ суть метатермины.

§ 31. Термины из высказываний

Из высказываний получаются термины по определенным правилам, например по таким правилам:

$A1$. Если t есть термин, X есть высказывание, а $\downarrow$ есть терминообразующий оператор, то $\downarrow X$, $t\downarrow X$, $X\downarrow$ суть термины.

$A2$. Если t есть субъект (предикат), то $t\downarrow X$ есть субъект (предикат); $\downarrow X$ есть субъект, $X\downarrow$ — предикат.

Термины, построенные по правилам $A1$ и $A2$, читаются так:

1) $\downarrow X$ — «Тот факт, что X», «То, что X»;

2) $X\downarrow$ — термин, который отличается от $\downarrow X$ только тем, что играет роль предиката (например, возможно высказывание «Предмет t характеризуется тем, что X», где выражение «тем, что X» есть $X\downarrow$);

3) $t\downarrow X$ — «t такой, что X», «t, который характеризуется тем, что X».

§ 32. Дедукционные и ориентационные определения

К определениям в науке прибегают по крайней мере в таких двух случаях. Первый случай: определения строят для того, чтобы они служили базой для дедукции. Назовем их дедукционными. Второй случай использования определений: установление (ограничение, выделение) некоторой области предметов, которая будет в том или ином случае предметом внимания (которую собираются исследовать или о которой собираются поговорить). Назовем их ориентационными. Примером таких определений являются определения предмета наук или их отдельных разделов.

Ориентационное определение ни в коем случае не может быть базой для дедукции. Оно вообще не входит в содержание науки. У него совсем другая функция: построив его, исследователь лишь заявляет, о чем он намерен говорить, что именно он намерен исследовать. Ориентационное определение хорошо лишь в качестве предисловия к предстоящему исследованию, а не в качестве итога какого-то длинного исследования.

§ 33. Информация

Среди множества новых подходов к изучению предметов, получивших распространение в последние годы, фигурирует «информационный подход». Он нашел применение и в изучении научных знаний. Но что такое информация? Мы не собираемся анализировать исходные термины и утверждения теории информации и тем более вводить какое-то уточнение понятия информации. Мы лишь схематично поясним некоторые общеизвестные вещи.

Пусть в некоторой области пространства X происходят некоторые события (или имеют место некоторые состояния) A. Пусть в другой области пространства Y (на некотором расстоянии от X) имеется предмет B. Пусть A и B соединены некоторым предметом C — каналом связи. Под влиянием A в C происходят какие-то события (процессы) так, что благодаря им в предмете B в свою очередь происходит что-то, образуются какие-то состояния D. Если вся эта система организована так, что с точки зрения нашего исследователя состояния D суть знаки состояний A, то происходящее в C называют передачей информации от A в B.

Таким образом, для того чтобы оценить какие-то явления как информационные процессы (передачу информации, информацию и т. п.), необходимо следующее: 1) материальные (физические, эмпирические и т. п., короче говоря — способные оказывать воздействие) явления A — источники информации; 2) материальные предметы B, испытывающие последствия воздействий A, — приемники информации; 3) материальные предметы C, по которым передается воздействие A на B, — каналы связи, или каналы передачи информации; 4) исследователь, с точки зрения которого результаты D воздействия A на B через C суть знаки для A.

Если даже оставить в стороне то, что теорию информации интересуют чисто количественные проблемы передачи информации, из приведенной схемы совершенно очевидно: логический и информационный подходы к научным знаниям вообще несовместимы. Логика рассматривает правила оперирования с терминами и высказываниями как с особыми предметами. И если при этом время от времени рассматривается отношение элементов знаний как знаков к предметам, то это делается лишь в той мере, в какой это нужно и полезно для рассмотрения упомянутых правил. Логика не рассматривает знания как информацию в смысле изложенной схемы.

Глава третья

ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Термины сами по себе не выражают никакого знания о предметах. Можно уметь оперировать некоторым термином, ничего не зная о тех предметах, которые он обозначает. Не составляют исключения на этот счет и понятия. Элементами («единицами») знаний являются только высказывания. Так что вопрос о том, что такое высказывание, является одним из центральных для логики науки.

Встречаются определения высказывания через значения истинности. В частности, это делают так: высказывание — то, что может быть истинным или ложным. Эти определения несостоятельны. Надо знать, что такое высказывание, прежде чем говорить о таких его свойствах, как истинность, ложность и т. п. Если в отношении истинности и ложности можно допустить иллюзию первичной ясности, то в отношении других значений истинности (а они возможны, и их тоже надо учитывать в определении высказывания) нечто подобное исключается. Применительно к некоторым формам высказываний даже термины «истинно» и «ложно» теряют кажущуюся первичную ясность. В дальнейшем мы покажем, что термин «истинно» нуждается в специальном определении даже для сравнительно простых структур высказываний.

Встречаются также определения высказывания с помощью выражений «мысль», «содержание», «утверждение», «отрицание» и т. п. В частности, высказывание иногда определяют как мысль, что-либо утверждающую или отрицающую. Эти определения точно так же несостоятельны. Утверждение и отрицание суть формы высказываний. Термины «мысль», «содержание» и т. п. не определены достаточно точно, многосмысленны. Употребление их в данном случае есть пережиток психологизма в логике, согласно которому языковые формы не сами по себе имеют интерес для логики, а лишь как оболочки особых идеальных (духовных) предметов, обитающих где-то в голове.

Высказывания суть эмпирически данные предметы, построенные из терминов и логических операторов по определенным правилам. Это особого рода «вещи», сконструированные из «вещей», которые можно услышать, увидеть, потрогать. И определение термина «высказывание» должно быть найдено путем описания и перечисления этих конструкций. Но при этом надо учитывать следующее. Во-первых, число различных структур высказываний не ограничено какими-то обстоятельствами, вытекающими из самой природы высказываний. И только потому, что введение в обиход новых структур зависит не от абстрактных возможностей их изобретения, а от внешних им потребностей людей, условий познания, целесообразности и т. п., люди оперируют лишь конечным (и сравнительно небольшим) множеством структур высказываний. Определение же по самой своей природе вносит какие-то ограничения. Во-вторых, высказывания можно рассматривать с различных точек зрения. И при этом описание структуры их с одной точки зрения требует отвлечения от всего того, что может быть обнаружено с другой. Можно сказать, что описание структуры высказываний есть процесс во многих «измерениях». И искомое определение может сложиться лишь из совокупности определений, даваемых в различных разделах логики.

§ 1. Высказывания и термины

Для построения высказывания нужно иметь по крайней мере два термина и по крайней мере один логический оператор. Пусть t^1, ..., t^n ($n \geqslant 2$) суть все термины, входящие в данное высказывание X. Мы принимаем следующие допущения:

$A1$. Существование предметов, обозначаемых терминами t^1 ..., t^n, не зависит от X (от того, построено оно или нет).

$A2$. Выбор предметов, обозначаемых терминами $t^1, \ldots, t^n$, не зависит от X.

$A3$. Смысл терминов $t^1, \ldots, t^n$ не зависит от X.

$A4$. Если $A1 — A3$ не выполнены, то выражение, содержащее $t^1, \ldots, t^n$, не есть высказывание.

Эти утверждения очевидны, и, может быть, поэтому их не формулируют явно, а между тем они важны именно как явные принципы построения высказываний. Возьмем выражение «То высказывание, которое я сейчас пишу (читаю), не является истинным». Пусть это есть высказывание, пусть оно истинно. Тогда оно не является истинным, как сказано в нем самом. Пусть оно ложно. Но тогда неверно, что оно не является истинным, т. е. оно является истинным. Парадокс неразрешим, если это выражение признать высказыванием. Очевидно, его высказыванием признать нельзя, что соответствует $A1 — A4$. В самом деле, выражение «То высказывание, которое я сейчас пишу» лишено смысла, пока высказывание не написано (никто не может выбрать предмет, обозначаемый этим выражением). Оно зависит от фразы в целом, и, не написав ее целиком, выбрать ее невозможно. Здесь не выполнены требования $A2$ и $A3$. Эта фраза, согласно $A4$, не есть высказывание.

Совершенно аналогично обстоит дело с парадоксом, в котором одна фраза говорит о ложности другой, в которой говорится об истинности первой. Пусть X^1 есть фраза «X^2 ложно», а X^2 — «X^1 истинно». Если X^1 истинно, то X^2, согласно X^1, должно быть ложно. Если X^1 ложно, то X^2 истинно, а X^1 будет истинно. Но чтобы выбрать X^2, необходимо уже иметь X^1. Чтобы выбрать X^1, необходимо иметь X^2. А это не удовлетворяет $A1 — A4$. И потому эти фразы не являются высказываниями.

В структуре фраз, разумеется, видимым образом никак не зафиксировано то, выполнены требования $A1 — A3$ или нет. Эти требования суть неформальные условия построения высказываний. И в каждом частном случае должно быть ясно, имеем мы дело с высказыванием или с высказываниеподобным предметом. Никаких формальных (структурных) критериев их различения (как и в случае со знаками и знакоподобными предметами) нет. Например, выражение «Дырбул аброкадабрит рениксу» очень похоже на высказывание. Но если мы заведомо его сфабриковали так, что невозможно выбрать предметы «Дырбул» и «аброкадабрит рениксу», то это выражение не есть высказывание.

§ 2. Простые и сложные высказывания

*D*1. Высказывания, которые не содержат в качестве своих частей другие высказывания, будем называть простыми или элементарными. Они расчленяются только на термины и логические операторы. Высказывания, которые содержат в качестве своих частей другие высказывания, будем называть сложными или составными. Они расчленяются на высказывания (в конечном счете — простые) и логические операторы. Например, высказывание «Студент сдал экзамен по химии» является простым, а «Все студенты сдали экзамен по химии» — сложным, поскольку (при условии логической стандартизации) оно состоит из оператора «Все студенты» (или «Для всех студентов») и высказывания «Студент сдал экзамен по химии». В составе высказывания «Если увеличить скорость самолета, то при всех прочих постоянных условиях возрастет его подъемная сила» содержатся два высказывания: «Скорость самолета увеличивается» и «Подъемная сила самолета увеличивается (при прочих постоянных условиях)».

Простые высказывания образуют связующее звено между терминами и высказываниями. Они состоят только из терминов и особых логических операторов, и сами они являются непременными частями любых высказываний. Если некоторая конструкция из терминов и логических операторов есть высказывание, то она обязательно содержит в себе такие высказывания. И если она их не содержит, она не есть высказывание. Операторы, с помощью которых из терминов образуются элементарные высказывания, образуют основу и исходный пункт различения терминообразующих и высказываниеобразующих операторов.

Приведем несколько примеров элементарных высказываний (чтобы яснее воспринималась последующая их абстрактная схема и определение): «Электрон заряжен отрицательно», «Простое число, отличное от двух, не делится на два», «Самолет ИЛ-2 имел максимальную скорость 405 км/час», «Наполеон I умер в 1821 г.», «Ленинград расположен севернее Москвы», «Точка *a* находится между точками *b* и *c*» и т. п. Обращаем внимание на следующее. Термины, входящие в эти высказывания, могут быть общими и индивидуальными, простыми и сложными, обозначать пары, тройки и т. д. предметов. Важно то, что все эти высказывания можно расчленить на такие термины;

1) субъект — термин, обозначающий то, о чем говорится в высказывании («Электрон», «Простое число, отличное от двух», «Самолет ИЛ-2», «Наполеон I», «Ленинград и Москва», «Точки *a*, *b* и *c*» и т. п.); 2) предикат — термин, обозначающий то, что говорится о предмете, обозначаемом субъектом («заряжен отрицательно», «не делится на два», «имел максимальную скорость 405 *км/час*», «умер в 1821 г.», «расположен севернее», «находится между» и т. п.). Кроме того, в них можно выделить нечто такое, что объединяет эти термины в высказывание, а именно логический оператор, который мы будем называть оператором предикативности. Из приведенных примеров отчетливо видно, что схемы логики суть абстракции по отношению к конкретным высказываниям: термины состоят из частей и даже разбросаны по предложению, а мы их берем как нечто целое и локализованное; операторы предикативности не выражены явно и не локализованы, а мы для них вводим четко локализованный символ. Однако эти схемы суть все-таки описания фактически встречающихся предложений: в них на самом деле имеются указанные термины, а оператору предикативности соответствуют фактически употребляемые языковые средства объединения субъектов и предикатов в целостные высказывания.

Сложные высказывания образуются из данных высказываний (в конечном счете — из простых) по правилам, общая схема которых имеет такой вид: если $X^1 \ldots, X^n$ $(n \geqslant 1)$ суть высказывания, то $\{\alpha; X^1, \ldots, X^n\}$ есть высказывание, где α есть логический высказываниеобразующий оператор («и», «или», «не», «если, то» и т. п.). Исследование сложных высказываний есть прежде всего исследование различных видов таких операторов и их свойств.

§ 3. Смысл высказываний

Применительно к высказываниям можно, как и в случае терминов, говорить о смысловом значении (о смысле) и предметном значении (о значении истинности, истинностном значении или просто о значении). Однако уже из простых примеров видно, что отсутствует полный параллелизм планов значения для терминов и для высказываний. Так, термин «простое число четыре» имеет значение и смысл, а высказывание «четыре — простое число» ложно. Употребление же терминов «истинно», «ложно» и т. п. при характеристике терминов основано на смешении понятий.

*D*1. Будем считать, что исследователю известен смысл простого высказывания, если и только если известен смысл всех входящих в него терминов и известен смысл сложного высказывания, если и только если известен смысл всех входящих в него высказываний. Знание свойств логических операторов предполагается. Высказывание имеет смысл, если и только если смысл его известен исследователю.

Выражения «высказывание имеет смысл» и «высказывание не имеет смысла» приходится употреблять лишь постольку, поскольку можно сконструировать предметы, похожие на имеющие смысл высказывания, и нет никаких структурных признаков, по которым их можно различить. Выражение «высказывание не имеет смысла (бессмысленно)» иногда употребляется также для обозначения того, что невозможно установить, истинно или ложно высказывание. Например, высказывание «Круглый квадрат имеет звание фельдфебеля» имеет смысл (оно «понятно»), но оно не является истинным и не является ложным (поскольку круглый квадрат не существует, будет неверно как само это высказывание, так и его отрицание). Мы в таких случаях будем употреблять другую терминологию.

*D*2. Термины и простые высказывания, входящие в данное высказывание, будем называть единицами смысла последнего.

Тождество X и Y по смыслу будем записывать символом

$$X \equiv Y.$$

*D*3. Два высказывания тождественны по смыслу только в силу соглашений или в силу следующих утверждений:

$$A1.\ (t^1 \rightleftharpoons t^2) \to (X \equiv X(t^1/t^2)),$$

где $X(t^1/t^2)$ есть высказывание, образованное из X путем замены t^1 на t^2.

$$A2.\ (X \equiv Y) \to (Z \equiv Z(X/Y)),$$

где $Z(X/Y)$ есть высказывание, образованное из Z путем замены X на Y.

Из определения смысла высказывания очевидно, что если исследователю известен смысл всех входящих в данное высказывание терминов и высказываний, то ему известен смысл высказывания в целом, и наоборот. Так, если исследователю известен смысл высказываний X и Y, то ему известен и смысл высказываний «X и Y», «X или Y», «Если X, то Y», и наоборот. Эта зависимость не всегда совпадет, как увидим ниже, с зависимостью высказываний по значению. Так, мы можем знать, что истинно высказывание «X или Y», и при этом не знать, истинно или ложно Y; мы можем знать, что истинны оба X и Y, но не знать, что истинно или ложно «Если X, то Y».

Из $A1$ — $A4$ второго параграфа следует, что смысл X, ...; X^n, входящих в данное сложное высказывание X, не зависит от того, построено X или нет. Отсюда также следует, что смысл высказывания вообще не зависит от того, элементом какой структуры оно является, и не изменяется из-за различия этих структур. Так что когда настаивают на том, чтобы не вырывать те или иные высказывания из контекста во избежание искажения его смысла, то тем самым предполагают неопределенность, расплывчатость, многозначность и т. д. терминологии и логических операторов. Это требование не есть логическое требование. Наоборот, это — неявное (или неосознанное) пожелание поступать так, чтобы можно было применить требования логики. Это лишь некоторое практическое условие, без которого невозможно воспользоваться правилами логики.

§ 4. Определения с высказываниями

В предшествующем параграфе говорилось, что два высказывания могут быть тождественны по смыслу в силу соглашения. Эти соглашения суть следствия из определений такого вида:

1) если a есть термин из области значения данного термина t, то X, содержащий a, будет высказыванием таким, что $X \equiv Y$ (где Y есть высказывание);

2) если t^1, ..., t^n ($n \geqslant 1$) суть термины, а X^1, ..., X^n суть высказывания, то X будет высказыванием таким, что $X \equiv Y$ (где Y есть высказывание).

Посредством указанных определений вводятся новые термины, новые логические операторы и новые комбинации терминов, высказываний и операторов. Например: 1) если a есть число, то выражение «a простое» будет высказыванием таким, что «a простое» $\equiv$ «a целое и a делится только на a и на 1»; здесь вводится новый термин «простое»; 2) если X и Y суть высказывания, то $X \supset Y$ будет высказыванием таким, что $(X \supset Y) \equiv (\sim X \vee Y)$; здесь вводится новый логический оператор $\supset$ (знак материальной импликации); 3) если X, Y и Z суть высказывания, то $(X \vee Y) \cdot Z$ будет высказыванием таким, что $(X \vee Y) \cdot Z \equiv X \cdot Z \vee Y \cdot Z$; здесь определяется новая комбинация высказываний и операторов $\vee$ и $\cdot$.

Указанные определения, как видим, суть определения с переменными. Обычно же сразу формулируют не только определения, но делают подстановку в переменные, так что определения принимают вид соглашений: X будет высказыванием таким, что $X \equiv Y$. Например, в соглашении «Число является простым» $\equiv$ «Число является целым и число не делится на другие числа, кроме себя и единицы», предполагается одно и то же число слева и справа от $\equiv$, т. е. сразу же предполагается подстановка в переменную, которая здесь не выражена (или роль переменной играет слово «число»).

Определения рассмотренного вида используются как сокращения для употребляющихся здесь выражений. Часто их формулируют посредством операторов «если, то» и «если и только если». Например, «Число является простым, если и только если оно является целым и делится только на себя и единицу». Но при этом в качестве определения принимают фактически следствие из явно не сформулированного определения (пример для имплицитных определений). В данном случае это делается благодаря правилу:

$$A1.\ (X \equiv Y) \rightarrow (X \leftrightarrow Y).$$

§ 5. Значения истинности

Значения высказываний (значения истинности, истинностные значения или предметные значения высказываний) обозначаются терминами «истинно», «ложно», «неопределенно» и т. д. Синонимами термина «истинно» иногда являются слова «правильно», «верно» и т. д. Термины, обозначающие значения высказываний, будем изображать символами

$$v,\ v^1,\ v^2, \ldots, v^n,\ v_1,\ v_2, \ldots, v_n.$$

Эти термины суть предикаты.

Надо различать: 1) установление смысла терминов, обозначающих значения высказываний; 2) выяснение того, какое значение имеет то или иное данное высказывание.

Нас будет интересовать лишь то, что связано с первым вопросом. Прежде чем изложить семантические принципы на этот счет, рассмотрим несколько примеров и сформулируем некоторые обобщающие их положения, образующие интуитивную основу для этих принципов.

Пусть некоторый отрезок разбит на n частей. Рассмотрим положение частицы a, имеющей конечные размеры, на этом отрезке. Возьмем высказывание «a находится внутри отрезка с номером i». Оно считается истинным, если частица a действительно находится внутри отрезка с номером i, ложным, если частица a не имеет точек в отрезке с номером i, и неопределенным, если частица a имеет точки в двух смежных отрезках или покрывает пограничную точку отрезка. Здесь третье значение истинности понимается не просто как отрицание истинности и ложности, но и как нечто позитивное: если кто-то утверждает, что высказывание неопределенно, мы точно знаем, что он хочет этим сказать о некоторой области действительности.

Если учесть различие прошлого и настоящего времени, то возможны четыре значения истинности: 1) истинно вчера и сегодня; 2) истинно вчера и ложно сегодня; 3) ложно вчера и истинно сегодня; 4) ложно вчера и сегодня. Хотя здесь все четыре значения определяются через истинность и ложность, однако берется одно и то же высказывание и сопоставляется с четырьмя различными ситуациями во времени. Аналогично вводятся значения истинности с учетом настоящего и будущего времени, а также других более сложных временных соотношений.

Говорить об истинности и ложности высказываний правомерно лишь тогда, когда возможно осуществить их проверку. Если проверка высказывания невозможна, т. е. его нельзя подтвердить и опровергнуть, то оно должно быть оценено как неопределенное (в общем, каким-то третьим значением истинности). К числу таких высказываний относятся высказывания о ненаблюдаемых объектах. Подобным же образом третье значение понимается в случае, когда истинность и ложность нельзя установить алгоритмически. В таких случаях третье значение истинности ставится в зависимость от возможности проверки. Но сама эта возможность в свою очередь зависит (косвенно, опосредованно) от объективных условий познания. Так что и здесь в конечном итоге высказывания сопоставляются с чем-то внешним по отношению к ним.

Короче говоря, то, что число значений истинности высказываний может быть более двух, есть эмпирически установленный факт. Но и абстрактно рассуждая (как и должна делать логика), это не представляет труда обнаружить. Пусть высказывание есть результат наблюдения, и проверка его осуществляется путем сопоставления этого высказывания с некоторой областью наблюдения. Высказывание содержит по крайней мере две единицы смысла. И сопоставление его с элементами (предметами) данной области наблюдения есть некоторая процедура, состоящая по крайней мере из двух шагов. На каждом шаге возможен положительный или отрицательный результат. Так что имеется возможность для введения по крайней мере четырех различных терминов, обозначающих эти результаты и являющихся значениями истинности. Если же значение истинности высказывания может быть установлено лишь путем выяснения того, получается оно по правилам логического следования из других высказываний или нет, то возможны по крайней мере такие случаи:

1) из X следует Y, и тогда Y считается истинным относительно X (Y доказуемо);

2) из X следует отрицание Y, и тогда Y считается неистинным относительно X (Y опровержимо);

3) если из X не следует Y и не следует отрицание Y, то Y считается неразрешимым относительно X; если для любого X имеет место сказанное выше, то Y неразрешимо вообще.

Нет необходимости рассматривать другие случаи: если факт возможности трех и более исходов при установлении значений истинности высказываний установлен, то он должен быть учтен в логической теории научных знаний.

Несмотря на различия приведенных выше примеров (а число их можно продолжить), в них усматривается нечто общее:

1) значения истинности суть различные результаты сопоставлений высказываний с некоторым фактическим положением дел в данных областях познания;

2) сопоставления осуществляются в соответствии со структурой высказываний, как некоторые упорядоченные процедуры;

3) рассмотрение простейших примеров показывает, что возможно более двух значений истинности;

4) если известно, каково значение истинности высказывания, то известно, каково фактическое положение вещей

в данной области, с которой ассоциируют данное высказывание;

5) выражение «X имеет значение истинности v» означает, что результат некоторых операций (скажем, проверочных операций) с X обозначается знаком v;

6) определить значения истинности, как таковые, — значит определить смысл знаков v.

Ограничение числа значений истинности двумя в истории логики было связано с самыми различными мотивами. Отметим два из них. Во-первых, в логике учитывались только такие случаи, когда оценка значений истинности высказываний ставилась в зависимость от одного и только одного шага проверки. Для этого исключались случаи непроверяемости высказываний, учитывались логические ударения и т. п. Во-вторых, высказывания оценивались по принципу: «Либо дело обстоит так, как говорится в высказывании, либо не так (как-то иначе)». А это «не так» не анализировалось в общем виде. В применении же к частным случаям оно было ясно из контекста.

Введение трех и более значений истинности не является фатальной необходимостью. Не всякая абстрактно мыслимая возможность непременно должна реализоваться. Не обязательно нужно вводить большое число значений истинности, если это не диктуется важными причинами. Однако наука логика обязана так или иначе констатировать фактические возможности в отношении значений истинности для всех исследуемых структур высказываний.

Если известно значение истинности высказывания X, то (согласно пункту 4) известно, что истинно некоторое высказывание Y. Так что все значения истинности должны быть определяемы через значение «истинно». Если это нельзя сделать, данное значение практически бесполезно.

§ 6. Метатермины и метавысказывания

Если высказывание рассматривается в качестве особого предмета, для него может быть введен термин, обозначающий его. Обычно берут для этой цели экземпляр самого высказывания с некоторыми дополнениями или физическими модификациями (кавычки, курсив и т. п.). Условимся термин, обозначающий высказывание X, изображать символом $[X]$.

$A1$. Смысл X не зависит от $[X]$. Смысл же $[X]$ известен, если и только если известен смысл X.

$D1$. Высказывания, в которые входят термины терминов (метатермины) или термины высказываний, суть метавысказывания.

Все утверждения логики о терминах и высказываниях суть метавысказывания. Мы выше не употребляли квадратные скобки (или другие знаки) исключительно из соображений простоты символики, полагая при этом, что из контекста ясно, о чем идет речь. Приведенные выше утверждения точнее будет записать в форме

$$[t^1] \rightarrow [t^2], \ [X] \equiv [Y]$$

и т. п. Аналогично будут метавысказываниями высказывания о значениях истинности высказываний:

1) $[X] \leftarrow v^i$ — «$[X]$ имеет значение истинности v^i», где v^i есть какое-то из v^1, v^2, ... (например, «$[X]$ истинно», «$[X]$ ложно» и т. п.);

2) $\sim([X] \leftarrow v^i)$ — «$[X]$ не имеет значения истинности v^i» («$[X]$ не является истинным», «$[X]$ не является ложным» и т. п.);

3) $[X] \approx [Y]$ — «X и Y равнозначны»;

4) $\sim([X] \approx [Y]$ — «X и Y не равнозначны».

$D2$. $[X] \approx [Y]$, если и только если для любого v^i выполняется условие: каждый раз, когда одно из X и Y имеет значение v^i, другое точно так же имеет значение v^i, т. е.

$$([X] \leftarrow v^i) \leftrightarrow ([Y] \leftarrow v^i),$$

где v^i есть любое значение истинности.

В дальнейшем, однако, для упрощения записи мы будем опускать квадратные скобки, полагая, что из контекста будет ясно, о чем идет речь.

Из $D2$ следует: если $X \approx Y$, то $\sim((X \leftarrow v^i) \cdot \sim (Y \leftarrow v^i))$.

§ 7. Принципы введения значений истинности

Предикаты значений истинности высказываний вводятся так, чтобы выполнялись следующие требования.

$A1$. Всякое высказывание X либо имеет некоторое значение v, либо не имеет его, т. е.

$$(X \leftarrow v) : \sim (X \leftarrow v).$$

$A2$. Тождественные по смыслу высказывания равнозначны, т. е.

$$(X \equiv Y) \rightarrow (X \approx Y).$$

$A3$. Если высказывание не имеет некоторого значения, то оно имеет какое-то другое (т. е. всякое высказывание всегда имеет какое-то значение).

Благодаря $A3$ исключаются случаи, когда нельзя установить значение высказывания. Бывает, что нельзя установить, истинно высказывание или ложно. Но это лишь означает, что оно имеет какое-то третье значение, отличное от истинности и ложности.

$A4$. Если невозможно установить, что данное высказывание имеет значение v, то $\sim (X \leftarrow v)$ (т. е. принимается, что оно не имеет этого значения).

Так, если нельзя установить, что X ложно, оно считается неложным; если невозможно установить, что X истинно, оно считается неистинным.

$D1$. Значения истинности $v^1, \ldots, v^n$ ($n \geqslant 2$) будем называть основными, если и только если для любой пары v^i и v^k из них выполняется следующее:

$$(X \leftarrow v^i) \rightarrow \sim (X \leftarrow v^k)$$

(т. е. если высказывание имеет одно из них, то оно не имеет никакого другого).

$D2$. Комплект основных значений истинности $v^1, \ldots, v^n$ будем считать полным, если и только если выполняется следующее:

$$(X \leftarrow v^1) : \ldots : (X \leftarrow v^n)$$

(т. е. высказывание всегда имеет какое-то из них).

$D3$. Значения истинности $v_1, \ldots, v_m$ ($m \geqslant 1$) будем называть дополнительными к основным, если и только если для каждого v_j ($j = 1, \ldots, m$) найдется хотя бы одно основное значение истинности v^i, такое, что выполняется утверждение:

$$(X \leftarrow v^i) \rightarrow (X \leftarrow v_j).$$

Среди v^i имеется одно привилегированное значение. Это значение — «истинно». Будем его изображать символом v^t. Оно обладает следующими свойствами.

$A5$. Значение «истинно» (v^t) всегда входит в число основных.

$$A6. \ (X \leftarrow v^t) \leftrightarrow X$$

(«Если [X] истинно, то X; если X, то [X] истинно»).

*A*7. Прочие основные значения определяются через v^t по схеме

$$(X \leftarrow v^i) \equiv (Y \leftarrow v^t),$$

где v^i зависит от вида Y.

$$T1.\ ((X \leftarrow v^i) \equiv (Y \leftarrow v^t)) \rightarrow ((X \leftarrow v^i) \leftrightarrow Y)$$

*A*8. Дополнительные значения истинности определяются через основные по схеме

$$(X \leftarrow v_j) \equiv (X \leftarrow v^i) : \ldots : (X \leftarrow v^k),$$

где v^i, ..., v^k суть значения из числа основных, а v_j — дополнительное значение.

*T*2. Поскольку все основные значения сводятся к v^t, то и дополнительные сводятся к v^t.

*T*3. Если число основных значений принято равным двум, то утверждение одного означает отрицание другого, а отрицание одного — утверждение другого.

*T*4. Если же число основных значений более двух, то утверждение одного означает отрицание всех остальных, а отрицание одного означает утверждение дизъюнкции остальных.

Значение «ложно» будем обозначать символом v^f.

*T*5. В общем случае из $\sim (X \leftarrow v^t)$ не следует $X \leftarrow v^f$, а из $\sim (X \leftarrow v^f)$ не следует $X \leftarrow v^t$ (т. е. если высказывание не является истинным, это не значит, что оно ложно; если высказывание не является ложным, это не значит, что оно истинно).

*T*6. Если число основных значений более двух, то

$$\sim ((X \leftarrow v^t) \approx X)$$

(т. е. высказывание «[*X*] истинно» не равнозначно *X*). В самом деле, если $X \leftarrow v^2$, то при $n=3$ получим $(X \leftarrow v^t) \leftarrow$ $\leftarrow v^f$ (т. е. если *X*, например, неопределенно, то «[*X*] истинно» ложно).

*T*7. Из *T*6 следует $\sim ((X \leftarrow v^t) \equiv X)$.

Определение значений истинности по приведенной в предшествующем параграфе схеме предполагает знание структуры высказываний *X* и *Y* (*Y* подбирается в зависимости от *X*, а не произвольно взятое высказывание). Таким образом, точные определения значений истинности высказываний можно построить лишь после того, как зафиксированы структуры этих высказываний. Определения должны быть даны для каждой структуры. Так что полное определение каждого из значений истинности возможно лишь при условии пересмотра всех структур высказываний. А так как здесь нет априорных границ, то невозможно и окончательно завершенное определение каждого из значений истинности. Изобретение какой-то новой структуры высказываний потребует и особых определений значений истинности применительно к этой структуре. Определения должны быть даны для каждой структуры потому, что определения, эффективные для одной структуры, не эффективны для другой.

§ 8. Двузначный и многозначный случаи

Число основных значений истинности не может быть меньше двух: если даже мы введем только один термин для значений истинности («истинно»), мы будем иметь два значения, так как отрицание его будет вторым основным значением.

Если число основных значений принимается равным двум, то имеет место двузначный или классический случай. При этом надо в рамках двузначного случая различать два подслучая:

1) принимается основное значение v^t («истинно»), а второе основное значение (обозначим его nv^t) определяется как его отрицание («неистинно»), т. е. принимается

$$(X \leftarrow nv^t) \equiv \sim (X \leftarrow v^t);$$

здесь двузначный случай есть лишь вариант энзначного случая, ибо утверждение

$$(X \leftarrow v^t) : \sim (X \leftarrow v^t)$$

не зависит от числа допускаемых основных значений; все положения такой двузначной логики имеют силу для высказываний независимо от того, сколько значений истинности может быть им приписано;

2) принимаются основные значения v^t и v^f такие, что v^f не будет отрицанием v^t, если перейти к трем и более значениям, т. е. не всегда верно

$$(X \leftarrow v^t) : (X \leftarrow v^f);$$

здесь выделяется лишь некоторый класс высказываний, для которых будут верны утверждения

$$\sim (X \leftarrow v^t) \leftrightarrow (X \leftarrow v^f), \ \sim (X \leftarrow v^f) \leftrightarrow (X \leftarrow v^t);$$

не все положения такой двузначной логики будут универсальны.

Если число основных значений истинности высказываний принимается равным трем или более, то имеет место многозначный или неклассический случай. В частности, возможен неклассический случай с четырьмя значениями: 1) v^t — истинно; 2) v^n — неопределенно; 3) v^o — непроверяемо; 4) v^f — ложно. Для них возможны дополнительные значения «неистинно», «определенно», «проверяемо», «неложно», «проверяемонеистинно», «проверяемонеложно» и «проверяемоопределенно».

§ 9. Истинность

Определение термина «истинно» зависит от структуры высказываний и способов их получения. Нет единого определения этого термина, годного для всех случаев высказываний. Очевидно, это будет иметь силу и для прочих значений, определяемых через него. В общей же форме можно сказать лишь следующее.

Термин «истинно» означает прежде всего, что исследователь принимает высказывание, согласен с тем, что в нем говорится, и т. д. Этот акт согласия, признания и т. д. есть некоторая первично ясная операция, не определяемая в терминах логики.

Но исследователь может по самым различным причинам и мотивам признать высказывание, — под угрозой наказания, по глупости, из тактических соображений и т. п. Мы, разумеется, должны исключить подобные причины и мотивы, должны допустить абсолютно бесстрашного, принципиального, бескорыстного и достаточно умного исследователя, который признает высказывание лишь в строго определенных случаях. Так что выражение «истинно» означает: исследователь принимает высказывание только потому, что имеет место какой-то из этих случаев. Определить термин «истинно» и, следовательно, высказывание «X истинно» — значит перечислить эти случаи.

То, что для высказываний с различной структурой термин «истинно» определяется различно, это очевидно. Например, в определяющей части выражений «$X \cdot Y$ истинно» и «$X \vee Y$ истинно» будут фигурировать, очевидно, различные выражения (иначе знаки «и» и «или» не будут различаться). Но термин «истинно» может иметь различное определение и для высказываний с одинаковой структурой, но получаемых различными способами. Например, для высказывания «Если X, то Y» термин «истинно» будет иметь различное определение в зависимости от того, получается такое высказывание путем опытного исследования эмпирических связей предметов или путем установления логической связи высказываний.

Иллюзия того, что термин «истинно» имеет один и тот же смысл для высказываний с одной и той же (сходной) структурой, создается за счет чисто психологического переноса: смысл этого термина известен для какой-то группы высказываний, и все прочие высказывания со сходной структурой рассматриваются с той же точки зрения. Иллюзия того, что термин «истинно» имеет некий единый смысл для высказываний с разной структурой, создается за счет того, что имеется в виду лишь сам акт признания высказываний и оставляется без внимания то, что заставляет осуществить этот акт.

Мы в дальнейшем термин «истинно» будем принимать как не определяемый в рамках логики в некоем общем виде. Но при этом мы не отвергаем пользу разъяснений такого рода: высказывание X истинно, если и только если положение на самом деле таково, как в нем говорится; «X» истинно, если и только если X и т. п. Например, высказывание «Снег бел» истинно, если и только если снег бел на самом деле.

§ 10. Функции истинности

Между высказываниями могут иметь место зависимости с точки зрения значений истинности. Они записываются утверждениями вида «Если X истинно, то Y истинно», «Если X ложно, то Y неопределенно», «Если X имеет какое-то одно из значений v^1, v^2, ..., а Y имеет значение v^i, то Z имеет значение v^k» и т. п. Рассматриваемые зависимости могут иметь также следующий вид: «Если X может иметь значение v^1, то Y имеет значение v^2», «Если X имеет значение v^1, то Y не может иметь значение v^2» и т. п.

В общем виде рассматриваемые утверждения можно записать такой схемой: если X^1 имеет (может иметь, не может иметь и т. д.) одно из значений v_1^1, ..., v_k^1 $(k \geqslant 1)$ ..., X^n $(n \geqslant 1)$ имеет (может иметь, не может иметь и т. д.) одно из значений v_1^n, ..., v_l^n $(l \geqslant 1)$, то Y имеет (может иметь, не может иметь и т. д.) одно из значений v_1^m, ..., v_r^m $(r \geqslant 1)$. Фиксируемые такими утверждениями зависимости высказываний называются функциями истинности. Определенные наборы таких утверждений задают типы функций истинности. Высказывания X^1, ..., X^n суть аргументы таких функций, а высказывание Y есть их функция. Поскольку словом «функция» называют также самую зависимость Y от X^1 ..., X^n, будем Y называть функционалом.

В зависимости от числа аргументов функции истинности разделяются на унарные (сингулярные, одинарные), бинарные, тернарные и т. п. В зависимости от числа основных значений истинности функции истинности разделяются на двузначные, трехзначные и т. п. (возможны бесконечнозначные). Приведем несколько примеров. Пример двузначной (основные значения v^1 и v^2) бинарной функции: если $X \leftarrow v^1$ и $Y \leftarrow v^1$, то $Z \leftarrow v^1$; во всех остальных случаях Z имеет значение v^2. Функцию такого типа обозначим символом $f\cdot^2$, а тот факт, что Z зависит от X и Y именно таким образом, — символом вида $Z = f\cdot^2 (X, Y)$. Пример трехзначной (основные значения v^1, v^2 и v^3) сингулярной функции: если $X \leftarrow v^2$, то $Y \leftarrow v^2$; если $X \leftarrow v^1$, то $Y \leftarrow v^3$; если $X \leftarrow v^3$, то $Y \leftarrow v^1$. Такую зависимость можно записать символом $Y = f^3 \sim (X)$.

Функции, в которых говорится о возможности или невозможности приписывать высказываниям значения истинности, будем называть потенциальными. Пример двузначной сингулярной потенциальной функции: X имеет значение v^1, если и только если Y может иметь значение v^1.

Функции истинности изучаются в пропозициональной логике. Последняя обобщается в математике как особый раздел алгебры, в котором функции истинности оказываются лишь частным случаем (частным примером) особого рода двузначных, трехзначных и т. п. функций вообще. Если оставить в стороне исторические взаимоотношения, то соответствующий раздел математики выступает теперь лишь как математический аппарат, удобный для решения некоторых проблем логики. Заметим, кстати, что когда говорят о технических приложениях логики, то фактически имеют в виду не логику (сфера приложения которой —язык науки, а не предметная область этой науки), а именно математический аппарат, приложимый в том числе и к логике.

Нам хотелось бы в данном разделе обратить внимание читателя на одно обстоятельство, в высшей степени важное для понимания сути ряда разделов логики. Это обстоятельство удивительным образом не замечают специалисты логики, так что даже создается впечатление, будто его сознательно игнорируют.

Начнем с примера. Конъюнкцией высказываний X и Y (обозначим $X \cdot Y$) называют высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба X и Y. Считается, во-первых, что это определение есть определение самого оператора конъюнкции («и»). В качестве примера приложений этого кусочка логики приводят, во-вторых, последовательное соединение контактов в электрической цепи.

Но непредубежденный читатель должен сразу заметить: в упомянутом примере с контактами электрической цепи речь идет о связи не двух элементов (положений двух контактов x и y), а трех, ибо третий элемент (z) есть наличие или отсутствие тока в электрической сети. Так что если здесь имеет место зависимость, аналогичная зависимости значения истинности $X \cdot Y$ от значений истинности X и Y, то она аналогична функции $Z = f^2 \cdot (X, Y)$, где речь идет о зависимости Z от X и Y, а не какой-то комбинации X и Y от них самих.

Возвратимся теперь к нашей непосредственной теме. Пусть $Y = f(X^1, \ldots, X^n)$, где $n \geqslant 1$, есть некоторая функция истинности. Возможны такие случаи:

1) Y не содержит в себе $X^1, \ldots, X^n$;

2) Y содержит в себе часть из $X^1, \ldots, X^n$ или всех их, но при этом содержит еще какие-то высказывания $Y^1, \ldots, Y^m$ $(m \geqslant 1)$;

3) Y состоит из $X^1, \ldots, X^n$ и только из них.

Так что если мы определили значения истинности для $X \cdot Y$ так, как выше, то зависимость этого сложного высказывания от входящих в него высказываний X и Y есть лишь частный случай $Z = f^2 \cdot (X, Y)$, имеющий вид $(X \cdot Y) = f^2 \cdot (X, Y)$.

Кроме того, чтобы определить значения истинности для высказываний вида $X \cdot Y$, необходимо уже иметь оператор $\cdot$ и знать, что конструкция $X \cdot Y$ есть высказывание. Принимая приведенное выше определение значений истинности $X \cdot Y$, фактически определяют не оператор $\cdot$, а термин «истинно» применительно к высказываниям с таким оператором, т. е. определяется выражение «$X \cdot Y$ истинно». И то, что при этом используется функция типа $f \cdot {}^2$, не меняет сути дела. Здесь складывается ситуация, аналогичная той, когда определяют высказывание через значения истинности.

С помощью функций истинности определяются условия приписывания значений истинности высказываниям с той или иной структурой (т. е. с теми или иными операторами), но не сами эти структуры (не сами эти операторы). Ниже мы покажем, что свойства логических операторов определяются утверждениями (правилами) совсем иного типа. Разумеется, отношения высказываний по значениям истинности играют важную роль при выработке этих правил (при их изобретении). Но применение этих правил, раз они изобретены, не зависит от значений истинности высказываний.

§ 11. Построение высказываний

С точки зрения построения в логике рассматривается лишь получение одних высказываний из других. При этом имеются в виду действия, которые внешне можно описать так:

1) даны высказывания X^1, ..., X^n; даны как видимые, слышимые и т. д. предметы; они анализируются — выясняются, какие термины и логические операторы входят в их состав и как расположены друг относительно друга; высказывания X^1, ..., X^n называются исходными;

2) в зависимости от результатов этого анализа и некоторых других внешних обстоятельств (условия, цель и т. п.) создается (воспроизводится и т. п.) высказывание Y; причем имеются правила, благодаря которым (в данных условиях и при данной целевой установке) создается именно Y; высказывание Y называется производным от X^1, ..., X^n;

3) правила эти изобретаются (вырабатываются) с таким расчетом, чтобы выполнялось следующее требование: если принимаются (признаются) X^1, ..., X^n, то и Y, полученное в соответствии с этими правилами, должно быть принято.

После того как эти правила изобретены и усвоены, положение оборачивается: они заставляют принимать Y, раз приняты X^1, ... X^n. Теперь они воспринимаются как нечто аналогичное силам и законам природы, а не как продукт творчества людей.

Из правил получения высказываний в логике изучаются прежде всего правила логического следования. Они вырабатываются с таким расчетом, чтобы выполнялось требование: если из X логически следует Y, и при этом X принимается за истинное, то и Y должно быть принято за истинное. Эти правила суть определения свойств логических знаков, входящих в X и Y. Так что если из X получается Y по этим правилам, то это имеет место в силу свойств логических знаков, входящих в них. Последние изобретены людьми такими, что из X логически следует или не следует Y в зависимости от строения X и Y. При этом X достаточно для получения и признания Y. Высказывание X называют посылкой, а Y — заключением (или следствием).

От правил логического следования отличаются правила, которые разрешают принимать Y, если приняты $X^1, \ldots, X^n$, но не являются определениями логических знаков, входящих в $X^1, \ldots, X^n$, Y. Их можно разбить на две группы. К одной из них относятся соглашения заменять одни высказывания другими и следствия таких соглашений, благодаря которым из терминов, фигурирующих в $X^1, \ldots, X^n$, получаются новые термины, фигурирующие в Y. Назовем их правилами замены терминов. Осуществляемые в соответствии с ними замены суть удобные средства хранения знаний и оперирования ими. Благодаря им сложные совокупности высказываний заменяются сокращенными, доступными обозрению совокупностями знаков. Это — не символизация, которая тоже сокращает, а именно замена одних совокупностей высказываний другими.

Например, такая замена при получении высказываний о скорости тела состоит не в замене слов «километр» и «секунда» сокращениями «км» и «сек», а в замене высказываний о расстоянии, пройденном телом, и о времени, в течение которого это происходило, одним высказыванием. При таких заменах, далее, явно формулируются логические свойства данных совокупностей высказываний. Более того, часто лишь благодаря такой замене совокупность высказываний приобретает свойства, позволяющие воспользоваться правилами вывода (в частности, логическими и математическими правилами). Например, заменив совокупность высказываний $a = b^1, \ldots, a = b^n$ на $a = f(\alpha, t)$, где α есть некоторая константа, t — время, а f — определенный тип функции, мы можем использовать свойства f в последующих рассуждениях. Вырожденный случай правил замены — простое одноактное соглашение употреблять вместо некоторой совокупности высказываний X высказывание Y.

Правила замены терминов (как и правила логического следования) чисто формальны, т. е. переход согласно им совершается на основе рассмотрения воспринимаемого вида терминов и высказываний. Эти правила называют дедуктивными. Неформален сам процесс выработки (изобретения, подбора) этих правил, творческие операции, задача которых — изобрести такие правила, чтобы последние затем можно было использовать стандартно, формально (в известных пределах, конечно). Число таких правил не ограниченно. К ним относятся правила, относящиеся ко всем наукам и лишь к отдельным областям науки, используемые многократно и лишь один раз. Научная деятельность в значительной мере состоит в изобретении таких правил.

Пусть X^1, ..., X^n суть высказывания, из которых по правилам замены терминов получается высказывание Y, причем из терминов t^1, ..., t^m, входящих в X^1, ..., X^n, получается термин t, входящий в Y. Обращаем внимание на то, что при этом t не определяется через t^1, ..., t^m. Более того, он вообще имеет значение, не зависящее от t^1, ..., t^n. Но правила, благодаря которым становятся возможными такие операции, содержат в себе элемент определения или вообще могут быть определениями. Причем они содержат переменные для терминов и, возможно, дополнительные операции, действительно не рассматриваемые в логике. Например, высказывания «Тело проходит расстояние a километров» и «Тело затрачивает на это b часов» можно заменить высказыванием «Тело имеет скорость a/b *км/час*»; здесь a и b суть переменные для величин, a/b означает операцию их деления; при этом определяется термин «скорость».

В терминах, полученных по правилам замены, должно содержаться какое-то указание на то, как он получается. Исследование правил образования терминов такого рода входит в задачу методологии частных наук, а не логики.

Ко второй группе относятся правила, которые иногда называют неформальными, индуктивными или внелогическими. Согласно этим правилам, может быть принято Y, если истинны X^1, ..., X^n, но не дается гарантии, что Y будет обязательно истинно. Известны случаи, когда Y затем оказывается неистинным и отвергается. Источник этих правил — некоторые общие допущения относительно исследуемых предметов.

Наконец, отметим еще одну группу операций, для которой трудно найти подходящее место в классификации логических действий. Назовем их трансформацией смысла высказываний. Суть их состоит в следующем. Пусть дано какое-то (любое) высказывание X. Исследователь может рассматривать этот сложный предмет X (состоящий по меньшей мере из двух терминов) с различных точек зрения. И на вопрос «О чем идет речь в X?» он может ответить различно. Например, на вопрос о том, о чем идет речь в высказывании «a больше b», исследователь может ответить так: 1) речь идет об a, и о нем говорится то, что он больше b; 2) речь идет о b, и о нем говорится то, что a больше его; 3) речь идет об a и b, и о них говорится то, что первый больше второго. Если смена точки зрения на X выражается в том, что строится новое высказывание Y, то исследователь осуществляет смысловую трансформацию высказывания X и Y. Такого рода трансформации не являются только приемами, придуманными логиками для анализа высказываний. Это — логические приемы, изобретенные людьми для оперирования с высказываниями.

*A*1. Если Y есть результат трансформации смысла X, то $X \equiv Y$.

§ 12. Субъектно-предикатные структуры

Оператор предикативности будем изображать символом $\leftarrow$, а элементарные высказывания — символами вида

$$s \leftarrow P.$$

Символы вида $P(s)$, обычно употребляемые в логической литературе, адекватны нашему: в них роль оператора предикативности выполняет написание субъекта и предиката рядом. Порядок же записи субъекта и предиката в логической схеме роли не играет. Известно, что Аристотель записывал субъекты и предикаты в обратном порядке, истолковывая такого рода высказывания как высказывания о присущности признаков объектам.

Теперь можно дать следующее строгое определение элементарного высказывания:

*D*1. $s \leftarrow P$ есть элементарное высказывание, если и только если s есть субъект, а P — предикат, причем если s есть энарный субъект, то P есть энарный (столь же местный) предикат, и наоборот.

Символы элементарных высказываний читаются так: «Предмет, обозначаемый термином s, имеет признак, обозначаемый термином P», «s имеет P», «s характеризуется тем, что P», «s таков, что P» и т. п. Например, высказывание

«Электрон заряжен отрицательно» будет читаться как «Электрон имеет признак быть заряженным отрицательно», «Электрон характеризуется тем, что заряжен отрицательно», «Электрону присуще свойство быть заряженным отрицательно» и т. п.; высказывание «Точка a находится между точками b и c» будет читаться как «Тройка точек a, b и c такова, что первая находится между второй и третьей» и т. п. Мы предполагаем, что исследователь умеет придать высказыванию такой вид, что оператор предикативности и термины будут достаточно четко выражены и локализованы. Если отвлечься от свойств языка как русского, английского и т. д. языка, то элементарные высказывания будут буквально складываться из субъектов, предикатов и операторов предикативности как из особого рода кирпичиков.

Высказывания вида

$$(s^1, \ldots, s^n) \leftarrow P,$$

где $n \geqslant 2$, суть частный случай элементарных высказываний. Здесь можно провести аналогию с атомами водорода и атомами, допустим, кислорода: вторые сложнее первых (как высказывания с энарными субъектами и предикатами при $n \geqslant 2$ сложнее высказываний с одинарными субъектами и предикатами), но они так или иначе остаются самыми простыми для кислорода атомами.

В связи с тем что высказывания строятся по правилам данного языка, которые не считаются с абстракциями и допущениями логики, то строгая локализация субъекта и предиката может быть достигнута лишь посредством следующей операции: 1) из X извлекают все s^1, ..., s^n и образуют термин (s^1, ..., s^n); 2) в пустые места вписывают выражения «первый», «второй» и т. п. в зависимости от положения s^1, ..., s^n в (s^1, ..., s^n); полученное высказывание есть Y; 3) X записывают в форме $(s^1, \ldots, s^n) \leftarrow (Y\downarrow)$.

Приведенная операция не есть нечто, придуманное специально в интересах логики и только логики. Дело в том, что предикат в X имеет смысл независимо от объекта, а установлен он может быть таким путем, который в обобщенной форме и описывает эта операция.

Изложенную операцию можно применить не только к простым высказываниям, но вообще к любым высказываниям. Если X есть любое высказывание, а s есть какой-то субъект, входящий в него, то X можно рассматривать как высказывание «s имеет тот признак, что X». Таким образом, символ $s \leftarrow P$ есть изображение не только одной из форм высказываний (элементарных высказываний), но также есть одно из изображений всякого высказывания. Например сложное высказывание $(s \leftarrow P^1) \cdot (s \leftarrow P^2)$ можно представить в форме $(s^1, s^2) \leftarrow Q$, где Q есть выражение «первый имеет P^1, а второй имеет P^2».

Ближайшей формой сложных высказываний являются отрицания элементарных:

1) внутреннее отрицание, при котором оператор отрицания относится к оператору предикативности; будем такое отрицание записывать символом

$$s \urcorner \leftarrow P$$

2) внешнее отрицание, при котором оператор отрицания относится к высказыванию как к целому; будем такое отрицание $s \leftarrow P$ записывать символом

$$\sim (s \leftarrow P)$$

Мы считаем, что роль внутреннего отрицания ясна для исследователя из его положения у оператора предикативности. В дальнейшем мы встретимся с другими случаями, когда будем допускать, что роль отрицания всегда ясна исследователю, если это отрицание относится к какому-то логическому оператору. Что касается внешнего отрицания, то здесь возможны два случая, различие которых существенно важно для нашей концепции.

Первый случай (будем его называть классическим) состоит в том, что внешнее и внутреннее отрицания отождествляются, поскольку явно или неявно принимается соглашение

$$\sim (s \leftarrow P) \equiv (s \urcorner \leftarrow P).$$

Второй случай (будем его называть неклассическим) состоит в том, что допускаются ситуации, когда невозможно установить, имеет место $s \leftarrow P$ или $s \urcorner \leftarrow P$. Это допущение базируется на фактах, поскольку такие высказывания и ситуации встречаются на самом деле (неразрешимые утверждения в математике, непроверяемые утверждения в микрофизике и т. д.). Далее можно пойти двумя путями:

Первый путь — ввести особый оператор неопределенности как первично ясный (разъясняемый на примерах). Пусть это будет символ вида ?. Тогда высказывание вида

$$s? \leftarrow P$$

будет читаться так: «Нельзя установить, $s \leftarrow P$ или $s\urcorner \leftarrow P$» или «s неопределенно имеет P». Теперь внешнее отрицание можно ввести соглашениями вида:

$$D^12.\ \sim(s \leftarrow P) \equiv (s\urcorner \leftarrow P) : (s? \leftarrow P)$$
$$\sim(s\urcorner \leftarrow P) \equiv (s \leftarrow P) : (s? \leftarrow P)$$
$$\sim(s? \leftarrow P) \equiv (s\urcorner \leftarrow P) : (s \leftarrow P).$$

Второй путь — принять как первично ясное внешнее отрицание и определить неопределенность через отрицания:

$$D^22.\ (s? \leftarrow P) \equiv \sim(s \leftarrow P) \cdot \sim(s\urcorner \leftarrow P).$$

Эти пути эквивалентны.

Если введены отрицания и неопределенность, то уместно такое определение:

$D3$. $(s \leftarrow P)$, $(s\urcorner \leftarrow P)$, $(s? \leftarrow P)$, $\sim(s \leftarrow P)$, $\sim(s\urcorner \leftarrow P)$, $\sim(s? \leftarrow P)$ суть высказывания, если и только если s и P суть соответственно равноместные субъект и предикат.

Определение $D3$ есть определение высказывания с точки зрения субъектно-предикатного строения. Оно является исчерпывающим для данного раздела логики.

В неклассическом случае неверны утверждения

$$\sim(s \leftarrow P) \rightarrow (s\urcorner \leftarrow P),\ \sim(s\urcorner \leftarrow P) \rightarrow (s \leftarrow P),$$

поскольку внешнее отрицание $s \leftarrow P$ может быть не только $s\urcorner \leftarrow P$, но и $s? \leftarrow P$, а отрицание $s\urcorner \leftarrow P$ может быть не только $s \leftarrow P$, но и $s? \leftarrow P$. Но обратные утверждения

$$(s\urcorner \leftarrow P) \rightarrow \sim(s \leftarrow P),\ (s \leftarrow P) \rightarrow \sim(s\urcorner \leftarrow P)$$

сохраняют силу (если s не имеет P, то неверно, что s имеет P; если s имеет P, то неверно, что s не имеет P). В неклассическом случае точно также неверно утверждение

$$(s \leftarrow P) : (s\urcorner \leftarrow P),$$

поскольку имеется третья возможность $s? \leftarrow P$. Здесь будет верно утверждение

$$(s \leftarrow P) : (s\urcorner \leftarrow P) : (s? \leftarrow P).$$

Но сохраняют силу утверждения

$$(s\alpha \leftarrow P) : \sim(s\alpha \leftarrow P),$$

где α означает наличие $\urcorner$ или ? или отсутствие обоих.

Так что когда речь идет о судьбе законов классической логики в логике неклассической, надо точно знать, какие именно законы логики имеются в виду.

Классический случай можно рассматривать как вырожденный случай неклассического, поскольку верно

$$\sim(s? \leftarrow P) \rightarrow (\sim(s \leftarrow P) \leftrightarrow (s \urcorner \leftarrow P)).$$

При этом, приняв аксиому $\sim(s? \leftarrow P)$, т. е. исключив неопределенности, мы получим

$$\sim(s \leftarrow P) \leftrightarrow (s \urcorner \leftarrow P),$$

отождествляющее внешнее и внутреннее отрицание.

Высказывание $s\alpha \leftarrow P$ считается истинным в сопоставлении с объектом, который обозначается термином s и который на самом деле имеет (не имеет, неопределенно имеет) признак, обозначаемый термином P. Остальные значения истинности определяются как производные:

$$\begin{aligned} D4.\ & ((s \leftarrow P) \leftarrow v^n) \equiv ((s? \leftarrow P) \leftarrow v^t) \\ & ((s \urcorner \leftarrow P) \leftarrow v^n) \equiv ((s? \leftarrow P) \leftarrow v^t) \\ & ((s \leftarrow P) \leftarrow v^f) \equiv ((s \urcorner \leftarrow P) \leftarrow v^t) \\ & ((s \urcorner \leftarrow P) \leftarrow v^f) \equiv ((s \leftarrow P) \leftarrow v^t) \\ & ((s? \leftarrow P) \leftarrow v^f) \equiv ((s \leftarrow P) \leftarrow v^t) : ((s \urcorner \leftarrow P) \leftarrow v^t) \\ & ((s\alpha \leftarrow P) \leftarrow v^o) \equiv (\sim(s \leftarrow E) \leftarrow v^t), \end{aligned}$$

где E есть предикат «существует».

Число значений истинности можно увеличить, если различить $s \urcorner \leftarrow E$ и $s? \leftarrow E$, а также если вместо предиката «существует» использовать предикат «возможно». Заменив $\equiv$ на $\leftrightarrow$, получим функции истинности для рассматриваемых форм высказываний.

Двузначный вариант будет иметь такой вид (основные значения v^t и nv^t; значение v^t не определяется).

$$\begin{aligned} D^14.\ & ((s \leftarrow P) \leftarrow nv^t) \equiv ((s \urcorner \leftarrow P) \leftarrow v^t) : ((s? \leftarrow P) \leftarrow v^t) \\ & ((s \urcorner \leftarrow P) \leftarrow nv^t) \equiv ((s \leftarrow P) \leftarrow v^t) : ((s? \leftarrow P) \leftarrow v^t) \\ & ((s? \leftarrow P) \leftarrow nv^t) \equiv ((s \leftarrow P) \leftarrow v^t) : ((s \urcorner \leftarrow P) \leftarrow v^t) \end{aligned}$$

Функции истинности для этого варианта имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} 1)\ & ((s \leftarrow P) \leftarrow v^t) \rightarrow ((s \urcorner \leftarrow P) \leftarrow nv^t) \\ & ((s \urcorner \leftarrow P) \leftarrow v^t) \rightarrow ((s \leftarrow P) \leftarrow nv^t) \\ 2)\ & (s? \leftarrow P) \approx \sim(s \leftarrow P) \cdot \sim(s \urcorner \leftarrow P) \end{aligned}$$

3) Если $(s \leftarrow P) \leftarrow nv^t$, то значение $(s \urcorner \leftarrow P)$ остается неопределенным (т. е. может быть как v^t, так и nv^t); если $(s \urcorner \leftarrow P) \leftarrow nv^t$, то значение $s \leftarrow P$ остается неопределенным.

Обращаем внимание на то, что исключение неопределенности не означает двузначного варианта, и наоборот. Можно неклассический случай рассматривать с точки зрения двузначного варианта, а классический — с точки зрения многозначного. Здесь нет абсолютной жесткой связи.

§ 13. Высказывания с «и» и «или»

Высказывания, которые не расчленяются на высказывания и логические операторы «и» и «или» (т. е. имеют структуру, не рассматриваемую в данном разделе логики), будем принимать здесь как элементарные. Операторы «и» и «или» будем изображать, как и прежде, символами соответственно $\cdot$ и $:$. Напоминаем, что под знаком «:» будем иметь в виду исключающее «или». Внешнее отрицание будем, как и выше, изображать символом $\sim$. Отрицания суть непременные участники логического анализа всех форм высказываний. В данном случае очевидно, что высказывания с операторами «и» и «или» можно отрицать.

*D*1. Определение высказывания:

1) элементарные высказывания суть высказывания;

2) если X есть высказывание, то $\sim X$ есть высказывание;

3) если $X^1, \ldots, X^n$ $(n \geqslant 2)$ суть высказывания, то $(X^1 \cdot \ldots \cdot X^n)$ и $(X^1 : \ldots : X^n)$ суть высказывания;

4) нечто есть высказывание лишь в силу 1—3.

Опять-таки интересно заметить, что это определение есть определение лишь одной группы структур высказываний, но оно является исчерпывающим: все прочие структуры учтены в пункте 1.

*D*2. Определение основной формы:

1) элементарные высказывания и их внешние отрицания суть основные формы высказываний;

2) если $X^1, \ldots, X^n$ суть высказывания, указанные в 1, то $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$ есть основная форма;

3) если $X^1, \ldots, X^n$ суть высказывания, указанные в 1 и 2, то $X^1 : \ldots : X^n$ есть основная форма;

4) высказывание является основной формой лишь в силу 1—3.

Мы допускаем (пока), что смысл основных форм известен исследователю. Смысл прочих форм определяется через основные определениями типа:

$$D3.\ \sim\sim X \equiv X$$
$$D4.\ \sim(X\cdot Y) \equiv (X\cdot\sim Y):(\sim X\cdot Y):(\sim X\cdot\sim Y)$$
$$D5.\ \sim(X:Y) \equiv (X\cdot Y):(\sim X\cdot\sim Y)$$
$$D6.\ (X:Y)\cdot Z \equiv (X\cdot Z):(Y\cdot Z)$$
$$D7.\ X\cdot(Y\cdot Z) \equiv X\cdot Y\cdot Z.$$

Значения истинности для рассматриваемых структур определяются либо посредством утверждений с $\equiv$ или с $\rightarrow$ и $\leftrightarrow$, либо посредством знаков функций истинности, если таковые уже имеются в готовом виде. Рассмотрим сначала двузначный вариант (основные значения v^t и nv^t). Как приписываются значения истинности элементарным высказываниям, здесь не рассматривается. Достаточно знать, что им приписываются значения v^t («истинно») и nv^t («неистинно»). Напоминаем, что определения значений истинности в рассматриваемом случае суть определения выражений вида $X \rightarrow v^t$, а не операторов, входящих в X.

D8. Высказывание $\sim X$ истинно, если и только если X неистинно.

D9. Высказывание $X^1\cdot \ldots \cdot X^n$ истинно, если и только если истинны все $X^1, \ldots, X^n$.

D10. Высказывание $X^1: \ldots :X^n$ истинно, если и только если истинно одно и только одно из $X^1, \ldots, X^n$.

Пусть у нас уже имеются определения функций истинности $Y=f^2\sim(X)$, $Y=f^2\cdot(X^1, \ldots, X^n)$ и $Y=f^2:(X^1, \ldots, X^n)$ (они аналогичны *D8* — *D10*, только вместо $\sim X$, $(X^1\cdot\ldots\cdot X^n)$, $(X^1: \ldots : X^n)$ стоит высказывание Y. В таком случае определениям *D8* — *D*10 можно придать такой вид:

$$D8.\ \sim X = f^2\sim(X)$$
$$D9.\ (X^1\cdot\ldots\cdot X^n) = f^2\cdot(X^1, \ldots, X^n)$$
$$D10.\ (X^1:\ldots:X^n) = f^2:(X^1, \ldots, X^n).$$

Рассмотрим теперь четырехзначный вариант (основные значения v^t, v^n, v^o и v^f).

D11. $\sim X$ истинно, если и только если X неопределенно или ложно; $\sim X$ ложно, если и только если X истинно; $\sim X$ непроверяемо, если и только если X непроверяемо.

D12. $X^1\cdot\ldots\cdot X^n$ истинно, если и только если все $X^1, \ldots, X^n$ истинны; $X^1\cdot\ldots\cdot X^n$ неопределенно, если и только если по крайней мере одно из $X^1, \ldots, X^n$ неопределенно, а все $X^1, \ldots, X^n$ неложны и непроверяемы; $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$ непроверяемо, если и только если по крайней мере одно из $X^1, \ldots, X^n$ непроверяемо, а все $X^1, \ldots, X^n$ не являются ложными; $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$ ложно, если и только если по крайней мере одно из $X^1, \ldots, X^n$ ложно.

*D*13. $X^1 : \ldots : X^n$ истинно, если и только если одно и только одно из $X^1, \ldots, X^n$ истинно, а все остальные не являются истинными; $X^1 : \ldots : X^n$ неопределенно, если и только если по крайней мере одно из $X^1, \ldots, X^n$ неопределенно, а все остальные ложны; $X^1 : \ldots : X^n$ непроверяемо, если и только если по крайней мере одно из $X^1, \ldots, X^n$ непроверяемо, а остальные неопределенны или ложны; $X^1 : \ldots : X^n$ ложно, если и только если все $X^1, \ldots, X^n$ ложны или по крайней мере два из $X^1, \ldots, X^n$ истинны, а все остальные неистинны.

Перенумеруем значения v^t, v^n, v° и v^f соответственно числами 1, 2, 3 и 4. Примем такие определения функций истинности.

*D**1. $Y = f^4 \sim (X)$, если и только если выполняется следующее: Y имеет значение 1, если X имеет значение 2 или 4; Y имеет значение 4, если X имеет значение 1; Y имеет значение 3, если X имеет значение 3.

*D**2. $Y = f^4 \cdot (X^1, \ldots, X^n)$, если и только если значение Y равно наибольшему из значений $X^1, \ldots, X^n$ (короче, $Y = max(X^1, \ldots, X^n)$).

*D**3. $Y = f^4 : (X^1, \ldots, X^n)$, если и только если выполняется следующее: Y имеет значение 1, если и только если одно и только одно из $X^1, \ldots, X^n$ имеет значение 1; Y имеет значение 2, если и только если по крайней мере одно из $X^1, \ldots, X^n$ имеет значение 2, а все остальные — значение 4; Y имеет значение 3, если и только если по крайней мере одно из $X^1, \ldots, X^n$ имеет значение 3, а все остальные — значение 2 или 4; Y имеет значение 4, если и только если все $X^1, \ldots, X^n$ имеют значение 4 или по крайней мере два из $X^1, \ldots, X^n$ имеют значение 1.

Теперь определениям *D*11 — *D*13 можно придать такой вид:

$$D11. \sim X = f^4 \sim (X)$$

$$D12. (X^1 \cdot \ldots \cdot X^n) = f^4 \cdot (X^1, \ldots, X^n)$$

$$D13. (X^1 : \ldots : X^n) = f^4 : (X^1, \ldots, X^n).$$

Из принятых определений получаются важные следствия:

$T1$. В двузначном варианте X и $\sim\sim X$ равнозначны, а в четырехзначном — нет. В самом деле, если $X \leftarrow v^n$, то $\sim X \leftarrow v^t$, а $\sim\sim X \leftarrow v^f$.

Из того факта, что справедливость утверждения $X \approx \approx \sim\sim X$ зависит от того, сколько основных значений истинности допущено и как определены значения истинности $\sim X$ в зависимости от X, никак не следует неуниверсальность законов логики. В данном случае законом логики будет как утверждение о том, что X равнозначно $\sim\sim X$ при некоторых допущениях, так и утверждение о том, что это неверно при иных допущениях.

$T2$. В любом варианте будут верны утверждения

$$X \rightarrow \sim\sim X \text{ и } \sim\sim X \rightarrow X,$$

поскольку из признания истинности X следует признание истинности $\sim\sim X$, а из признания истинности $\sim\sim X$ следует признание истинности X.

Определения значений истинности для высказываний рассматриваемого вида построены так, что не только по значениям высказываний $X^1, \ldots, X^n$, входящих в Y, можно судить о значениях истинности Y, но и наоборот, по значениям Y можно судить о значениях $X^1, \ldots, X^n$. Например, если $X \cdot Y$ истинно, то X истинно; если $X \cdot Y$ неистинно, то по крайней мере одно из X и Y неистинно. Так что имеют место и обратные функции.

§ 14. Производные операторы

Посредством операторов $\cdot$, $:$ и $\sim$ можно ввести производные операторы. Примем следующий стандартный способ введения производных операторов, позволяющий решить проблему таких операторов исчерпывающим образом. Пусть $X^1, \ldots, X^n$ суть какие-то высказывания. Будем называть операторными конституэнтами всевозможные конъюнкции, образованные из $X^1, \ldots, X^n$ и их отрицаний, причем каждое из X^i обязательно входит в каждую из этих конъюнкций и входит только один раз. Пусть $Y^1, \ldots, Y^m$ суть всевозможные операторные конституэнты для данных высказываний $X^1, \ldots, X^n$. Будем называть операторными определяющими высказывания вида Z и $Z^1 : \ldots : Z^k$, где $Z, Z^1, \ldots, Z^k$ суть высказывания из числа $Y^1, \ldots, Y^m$, причем $Z^1, \ldots, Z^k$ попарно различны. Операторные определяющие будем считать различными в том и только в том случае, если они не равнозначны. Очевидно, число возможных операторов, вводимых посредством операторных определяющих, равно числу различных определяющих.

Приведем некоторые производные операторы, часто встречающиеся в логической и внелогической научной литературе.

$$D1.\ X \vee Y \equiv X \cdot \sim Y : \sim X \cdot Y : X \cdot Y$$
$$D2.\ X \supset Y \equiv X \cdot Y : \sim X \cdot Y : \sim X \cdot \sim Y$$
$$D3.\ X \supset\subset Y \equiv X \cdot \sim Y : \sim X \cdot Y$$

Оператор $\vee$ есть ослабленное, соединительное или неисключающее «или», $\supset$ — материальная импликация, $\supset \subset$ — материальная эквивалентность.

Материальная импликация больше всех логических операторов породила споров и недоразумений. Ее свойства описываются такими утверждениями.

$$T1.\ (X \supset Y) \approx (\sim X \vee Y)$$

*T*2. $X \supset Y$ истинно, если и только если истинно Y или (неисключающее «или») ложно X (другими словами, $X \supset Y$ ложно только в том случае, когда истинно X и неистинно Y).

*T*3. Если $X \supset Y$ истинно и X истинно, то Y истинно. Если $X \supset Y$ истинно и Y неистинно (или $\sim Y$ истинно), то X неистинно (или $\sim X$ истинно).

Описанные свойства материальной импликации позволили использовать ее в качестве средства экспликации условных высказываний и логического следования. Однако это привело к ряду проблем, которые мы рассмотрим ниже.

Раздел логики, в котором изучаются свойства высказываний с операторами «не», «и», «или» и другими производными от них операторами (или свойства самих этих операторов), называют логикой высказываний или пропозициональной логикой. Это наиболее развитый раздел логики, изложение которого читатель найдет в любом учебнике математической логики. В рамках логики ему придают значение самого фундаментального ее раздела. На него больше всего ссылаются, когда говорят о приложениях математической логики. К нему чаще всего прибегают, когда используют логику в разговорах на методологические темы. Такая популярность пропозициональной логики имеет, конечно, разумное оправдание в самом факте употребления операторов «и», «или», «не» и т. д. Однако здесь имеется и элемент преувеличения, когда пропозициональную логику пытаются использовать для решения проблем принципиально иного рода.

§ 15. Условные высказывания

Условные высказывания суть высказывания вида «Если X, то Y», где X и Y суть высказывания, а «если, то» — особый высказываниеобразующий логический оператор (оператор условности). Будем такого рода высказывания, как и выше, изображать символами вида

$$X \to Y,$$

а их внутренние отрицания и неопределенные формы — символами вида

$$X \urcorner \to Y, \ X? \to Y.$$

В этом разделе логики высказывание можно определить так:

$D1$. Если X и Y суть высказывания, то $X \to Y$, $X \urcorner \to Y$ и $X? \to Y$ суть высказывания. Эти высказывания называются условными. Причем X называется антецедентом, а Y — консеквентом.

В языке слова «если, то» не всегда играют роль логического оператора условности. Например, в высказывании «Если Иванов получает по всем предметам пятерки, то Петров выше тройки не поднимается» слова «если, то» играют роль конъюнкции, а не оператора условности. С другой стороны, роль оператора условности могут играть другие языковые средства. Так, в предложении «С увеличением температуры давление данной массы газа при постоянном объеме увеличивается» оператор условности выражен языковыми средствами, не имеющими ничего похожего на «если, то». И затея «приблизить» логику к естественному языку в такого рода случаях выглядит довольно нелепо. Притом остается еще выяснить, будет ли такое «приближение» к русскому языку в то же время приближением к китайскому или французскому.

Внешнее отрицание для условных высказываний определяется так:

$$D2. \ \sim(X \to Y) \equiv (X \urcorner \to Y) : (X? \to Y)$$
$$\sim(X \urcorner \to Y) \equiv (X \to Y) : (X? \to Y)$$
$$\sim(X? \to Y) \equiv (X \to Y) : (X \urcorner \to Y)$$

Рассмотренный случай с различением двух отрицаний и со знаком неопределенности является неклассическим. В классическом случае неопределенности исключаются, и формы отрицания не различаются, т. е. имеет силу утверждение

$$\sim(X \to Y) \equiv (X \urcorner \to Y)$$

Оператор «если и только если» определяется как производный:

$$D3.\ (X \leftrightarrow Y) \equiv (X \to Y) \cdot (Y \to X)$$
$$(X \urcorner \leftrightarrow Y) \equiv (X \urcorner \to Y) \vee (Y \urcorner \to X)$$
$$(X? \leftrightarrow Y) \equiv ((X? \to Y) \vee (Y? \to X)) \sim (X \urcorner \to Y) \sim (Y \urcorner \to X)$$

Условные высказывания получаются различными способами:

1) как первичные соглашения;

2) из опытного исследования (рассмотрим ниже специально);

3) по правилам логики из других условных высказываний; например, из $X \to Y$ и $Y \to Z$ получается $X \to Z$ по правилу транзитивности;

4) по правилам логики из высказываний другого типа; например из $X : Y$ получаются $X \to \sim Y$, $Y \to \sim X$, $\sim X \to Y$, $\sim Y \to X$;

5) из логического следования одних высказываний из других; так, если из X логически следует Y, то $X \to Y$; если из X и Y логически следует Z и при этом Y истинно, то $X \to Z$.

Так что вопрос о значениях истинности условных высказываний должен быть явно расчленен на два: 1) вопрос о том, когда условные высказывания принимаются или не принимаются; 2) вопрос о том, каков смысл выражений вида $(X\alpha \to Y) \to v^i$.

В логике сложилась традиция рассматривать материальную импликацию как экспликацию оператора условности, т. е. рассматривать $X \supset Y$ как $X \to Y$. Оставим в стороне возражения против этого, исходящие из допущения двух форм отрицания и неопределенности, и возьмем лишь классический случай. И для этого случая замечено следующее. Высказывания $X \to Y$ и $X \supset Y$ действительно имеют общие свойства: если истинно $X \to Y$ и истинно X (неистинно Y), то истинно Y (соответственно неистинно X); аналогично для $X \supset Y$. Однако имеются и различия:

1) если истинны X и Y, то истинно $X \supset Y$ (по определению импликации), но об $X \to Y$ еще ничего нельзя сказать; оно при этом может оказаться ложным; 2) если ложно X, то по определению при любом Y истинно $X \supset Y$, чего нельзя сказать об $X \to Y$; 3) если истинно Y, то по определению будет истинно $X \supset Y$ при любом X, чего точно так же нельзя сказать об $X \to Y$. Возьмем, например, высказывания «Петр I умер в 1725 г.» и «Электрон заряжен отрицательно». Материальная импликация первого и второго истинна, тогда как вряд ли можно их связать оператором условности: этому мешает некоторое его интуитивное понимание. А с этим интуитивным пониманием необходимо считаться, ибо экспликация есть «проявление» и «уточнение» именно интуиции, а не чего-то иного.

Условные высказывания не являются функциями истинности образующих их высказываний в том же смысле, в каком функцией истинности являются материальные импликации. Но они являются функциями истинности в некотором ином смысле. Приведем соответствующие определения только для истинности и ее отрицания.

*D*4. Если $X \to Y$ признается истинным, то признание истинности X обязывает признать истинность Y, а признание того, что Y не является истинным, обязывает признать, что X не является истинным. Если признается истинным X (неистинным Y), и это признание обязывает признать (в силу правил логики, соглашений, определений и т. д.) истинным Y (неистинным X), то должно быть признано истинным $X \to Y$. Если $X \to Y$ признается неистинным, то признание X истинным (Y неистинным) не обязывает нас признать истинным Y (неистинным X). Здесь, как видим, имеют место своеобразные функции от функций:

$$(X \to Y) = f^1(Y = f^2(X),\ X = f^3(Y)).$$

*D*5. Если истинно $X \to Y$, то неистинно $X \urcorner \to Y$; если истинно $X \urcorner \to Y$, то неистинно $X \to Y$; если неистинно $X \to Y$, то значение $X \urcorner \to Y$ остается неопределенным; аналогично, если неистинно $X \urcorner \to Y$, значение $X \to Y$ остается неопределенным; т. е. не исключается случай, когда оба $X \to Y$ и $X \urcorner \to Y$ являются неистинными; последнее имеет место тогда, когда истинно $X? \to Y$.

*D*6. $X? \to Y$ равнозначно $\sim (X \to Y) \cdot \sim (X \urcorner \to Y)$.

Внутреннее отрицание $X \to Y$ означает, что признание X не обязывает к признанию Y. Неопределенность $X \to Y$

означает, что не известно, обязывает признание X к признанию Y или нет.

В связи с условными высказываниями рассматривают высказывания вида «Если бы не-X, то было бы не-Y», «Если бы было X, то было бы не-Y» и т. п., называемые контрфактическими. Например, «Если бы у Наполеона не было насморка, то он выиграл бы битву у Ватерлоо». Такие высказывания суть сокращения для высказываний $X \cdot Y \cdot (\sim X \to \sim Y)$, $\sim X \cdot Y \cdot (X \to \sim Y)$ и т. п.

Логически тривиальной является также проблема объяснения. Объяснить нечто, описываемое высказыванием Y, значит найти такие высказывания X, считаемые истинными и понятными, что правомерно $X \to Y$. Нетривиально нахождение таких X в конкретных науках. Впрочем, проблема объяснения, если осуществить ее логический анализ, оказывается соединением весьма разнородных с логической точки зрения проблем.

§ 16. Высказывания с кванторами

Кванторы суть натуральные числа («ноль», «один», «два» и т. д.), а также выражения «бесконечное число», «конечное число», «все», «некоторые», «большинство», «меньшинство», «половина», «третья часть», «только некоторые» и т. п.), употребляемые в высказываниях совместно с входящими в них терминами.

Кванторы не являются терминами высказываний и даже частями терминов, хотя слова «один», «два» и т. п. могут быть терминами и частями терминов. Например, в высказывании «Три типа современных самолетов развивают скорость более трех тысяч километров в час» слово «три» в первом случае есть квантор, а во втором — часть предиката. Таким образом, кванторы суть не просто слова вида «один», «два», «все» и т. п., но суть определенные функции предметов такого рода.

Примем обозначения:

1) ꓘ — любой квантор;
2) ꓘa — ꓘ предметов a;
3) $\neg$ ꓘ — не-ꓘ;
4) ? ꓘ — невозможно установить, ꓘ или $\neg$ ꓘ.

В логике подробно исследуют свойства кванторов «все» («каждый») и «некоторые» («по крайней мере один»). Будем их обозначать символами соответственно

1) $\forall a$ — все предметы a;

2) $\exists a$ — некоторые из предметов a.

Вопрос о способе изображения высказываний в логике имеет принципиальное значение, поскольку он есть вопрос о способе их логической стандартизации, т. е. вопрос об их структуре. На примере высказываний с кванторами это обнаруживается достаточно отчетливо.

В естественных (обычных и научных) языках кванторы часто становятся непосредственно перед терминами высказываний. Так, например, обстоит дело в высказывании «Все a больше некоторых b». Но в логике принято кванторы выносить из высказываний и записывать рядом с высказываниями, указывая при этом также те термины, к которым относятся кванторы. Так, если X есть высказывание, a — термин, а α означает, что перед ⅄ имеется или нет какой-то из знаков $\urcorner$ и ?, то высказывание, содержащее α⅄, запишется в виде (α ⅄a) X. Удобство этого способа изображения очевидно: можно рассматривать высказывания с любой структурой (т. е. отвлекаться от структуры X), формулируя правила для высказываний с кванторами в предельно обобщенной форме.

Но дело не только в этом. Запись кванторов непосредственно перед терминами имеет один крупный недостаток: высказывания с двумя и более кванторами в некоторых случаях допускают различные по смыслу толкования. Так, высказывание «Все a больше некоторых b» можно толковать как «Для каждого a найдется такой b, что a больше b» и как «Некоторые b таковы, что все a больше их». Эти толкования не тождественны по смыслу (из первого высказывания не следует второе; первое может быть истинно, а второе при этом может быть ложно). Такого рода факты говорят о том, что при построении высказываний с двумя и более кванторами важно не только то, какие кванторы и перед какими терминами проставляются, но и то, в какой последовательности это делается (т. е. в каком порядке приписываются кванторы). А порядок приписывания кванторов может и не совпадать с порядком терминов в высказывании. Различный порядок приписывания кванторов может означать различные по смыслу высказывания, полученные в различных актах исследования. Принятый в логике способ изображения высказываний с кванторами это учитывает посредством последовательной записи кванторов с соответствующими терминами. Будучи рекомендован наукам в качестве некоторого стандартного образца, он способствует устранению двусмысленностей из языка науки.

Выше уже говорилось о том, что одни и те же знаки могут играть роль кванторов и частей терминов. Логическая стандартизация высказываний позволяет точно установить, какую именно роль выполняет тот или иной знак. Возьмем, например, высказывание «Два атома водорода и один атом кислорода образуют молекулу воды». Представим это высказывание в стандартной форме: «Два атома водорода и один атом кислорода таковы, что атом водорода и атом кислорода образуют молекулу воды». Очевидно, мы получили ложное высказывание, приняв слова «один» и «два» за кванторы, каковыми они на самом деле не являются.

Наконец, принятый в логике способ изображения высказываний с кванторами делает более явными логические свойства этих высказываний, что точно так же играет немаловажную роль в науке. Как видим, даже в таком казалось бы сугубо второстепенном деле, как отыскание удобной формы записи, логика вольно или невольно работает над усовершенствованием языка науки.

Прежде чем сформулировать определение высказывания в данном разделе логики, опишем схему включения кванторов в высказывания:

1) по правилам трансформации высказыванию X придается вид

$$t \leftarrow (X\downarrow),$$

где $X\downarrow$ есть предикат, получающийся благодаря рассмотренной в § 12 операции, а t — термин, входящий в X;

2) в зависимости от результатов исследования к термину t приписывается квантор $\Join$ с отрицанием, оператором неопределенности или без них, так что высказывание принимает вид

$$\alpha\Join t \leftarrow (X\downarrow)$$

(читается «$\alpha\Join$ предметов t таковы, что X», «$\alpha\Join t$ таковы, что X», «X истинно в отношении $\alpha\Join t$» и т. п.).

Очевидно, если $\alpha\Join$ изъять из высказывания $\alpha\Join t \rightarrow (X\downarrow)$, то оставшаяся часть высказывания $t \rightarrow (X\downarrow)$ будет высказыванием.

Приняв такую запись за первично ясную, можно затем принять правила трансформации, благодаря которым высказываниям придается тот вид, какой и принят в логике:

$$A1.\ (\alpha\reflectbox{K}t)\,(t \leftarrow (X\downarrow)) \equiv \alpha\reflectbox{K}t \leftarrow (X\downarrow)$$

$$A2.\ (\alpha\reflectbox{K}t)\,X \equiv (\alpha\reflectbox{K}t)\,(t \leftarrow (X\downarrow))$$

$D1$. Если X есть высказывание, t — термин, $\reflectbox{K}$ — квантор, то $(\reflectbox{K}t)\,X$, $(\urcorner\,\reflectbox{K}t)\,X$, $(?\reflectbox{K}t)\,X$ суть высказывания.

Примем также утверждение для случая двух и более кванторов:

$$A3.\ (\alpha\reflectbox{K}^1t^1)\,(\beta K^2t^2)\,X \equiv (\alpha\reflectbox{K}^1t^1)\,((\beta\reflectbox{K}^2t^2)\,X)$$

Пусть высказывание Y имеет вид

$$(\alpha^1\reflectbox{K}^1t^1)\ldots(\alpha^n\reflectbox{K}^nt^n)\,X,$$

где $n \geqslant 1$; $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ есть какая-то комбинация отрицаний, неопределенностей и их отсутствия; $\reflectbox{K}^1, \ldots, \reflectbox{K}^n$ есть какая-то комбинация кванторов; в X не входят кванторы.

$D2$. В таком случае X есть бескванторная основа Y, а $(\alpha^1\reflectbox{K}^1t^1)\ldots(\alpha^n\reflectbox{K}^nt^n)$ есть кванторная группа Y.

Пусть $(\forall t)\,X$ нельзя доказать и опровергнуть, а перебрать все t невозможно (потому что, например, число t бесконечно). Пусть все рассмотренные t таковы, что X. И как бы велико ни было число рассмотренных случаев, в данных условиях нет логических оснований признать $(\forall t)\,X$ или $(\urcorner\,\forall t)\,X$. Это положение можно зафиксировать с помощью знака неопределенности, т. е. приняв $(?\forall t)\,X$. И если в науке часто в таких случаях все же принимают $(\forall t)\,X$, то делают это не из логических, а из других соображений (например, рассмотрено достаточно большое число предметов; высказывание принимается как гипотеза, подтверждаемая следствиями; и т. п.). Таким образом, учитывать возможность случаев со знаком неопределенности перед кванторами есть дело вполне правомерное в логическом исследовании языка науки. При этом неопределенность квантора отлична от неопределенности, которая может иметь место в основе.

Построение высказывания, в основу которого входит термин t, а в кванторную группу входит $\alpha\reflectbox{K}t$, есть квантификация термина t.

Наконец, если признаки различаются по видам, то квантификация предикатов осуществляется неявно, поскольку неявно принимают

$$(s \leftarrow P) \leftrightarrow (\exists P)\,(s \leftarrow P), \ \sim(s \leftarrow P) \leftrightarrow (\forall P) \sim (s \leftarrow P).$$

Поскольку все, что верно для квантификации субъектов, верно и для квантификации предикатов (но не всегда наоборот!), мы в дальнейшем будем говорить о квантификации любых терминов.

Внешнее отрицание высказываний с кванторами определяется аналогично субъектно-предикатным и условным формам:

$$
\begin{aligned}
D1.\ & \sim (\text{ꓘ}t)\, X \equiv (\urcorner\, \text{ꓘ}t)\, X : (?\text{ꓘ}t)\, X \\
& \sim (\urcorner\, \text{ꓘ}t)\, X \equiv (\text{ꓘ}t)\, X : (?\text{ꓘ}t)\, X \\
& \sim (?\text{ꓘ}t)\, X \equiv (\text{ꓘ}t)\, X : (\urcorner\, \text{ꓘ}t)\, X
\end{aligned}
$$

Так что в общем (неклассическом) случае будут неверны утверждения

$$\sim (\urcorner\, \text{ꓘ}t)\, X \rightarrow (\text{ꓘ}t)\, X, \quad (\text{ꓘ}t)\, X : (\urcorner\, \text{ꓘ}t)\, X,$$

поскольку имеется третья возможность — $(?\text{ꓘ}t)\, X$. Классический случай получается как частный случай путем исключения неопределенностей из кванторов. Он может быть записан либо путем принятия определения (или аксиомы)

$$\sim (\text{ꓘ}t)\, X \equiv (\urcorner\, \text{ꓘ}t)\, X,$$

либо путем принятия утверждения

$$\sim (?\text{ꓘ}t)\, X$$

§ 17. Основные кванторы

Основные кванторы суть $\forall$ и $\exists$. Между ними имеет место связь, определяемая утверждениями

$$
\begin{aligned}
A1.\ & (\exists t)\, X \equiv (\urcorner\, \forall t) \sim X \\
& (\urcorner\, \exists t)\, X \equiv (\forall t) \sim X \\
& (?\exists t)\, X \equiv (?\forall t) \sim X
\end{aligned}
$$

В классическом случае, когда исключаются неопределенности, $A1$ принимает вид

$$
\begin{aligned}
& (\exists t)\, X \equiv \sim (\forall t) \sim X \\
& \sim (\exists t)\, X \equiv (\forall t) \sim X.
\end{aligned}
$$

Эти утверждения позволяют принимать один из кванторов $\forall$ и $\exists$ как первичный, а другой — как производный, определяемый через него.

Смысл высказываний с кванторами $\forall$ и $\exists$ разъясняется через конъюнкции и дизъюнкции высказываний без кванторов. Пусть $t1$, $t2$, ..., tA суть всевозможные индивидуальные термины из области значения t, а число A есть число всех индивидов из области значения t. Число A может быть бесконечно, но это не должно смущать: речь будет идти не о получении истинных высказываний с кванторами, а лишь об определении смысла последних.

Символом Xi будем обозначать высказывание, образованное из X путем подстановки ti на место t везде, где t входит в X. Кванторы $\forall$ и $\exists$ кажется возможным определить так:

$$(\forall t)\, X \equiv X1 \cdot \ldots \cdot X\mathrm{A}$$
$$(\exists t)\, X \equiv X1 \vee \ldots \vee X\mathrm{A}.$$

Эти определения правомерны, поскольку A конечно и не учитывается возможность неопределенности. Если же A бесконечно (или даже достаточно велико, практически бесконечно, не ограничено и т. д.), то в определяющей части нужно иметь в виду не сами Xi, а лишь допускаемую возможность их построения. Но в таком случае надо считаться со случаями, когда не для всех индивидов из области значения квантифицируемого термина возможно построение таких высказываний, т. е. с неопределенностью для кванторов. А если последнюю признать возможной, то приведенные определения окажутся противоречивыми. В самом деле, верны утверждения:

$$(?\forall t)\, X \rightarrow \sim(\forall t) X \cdot \sim(\urcorner \forall t)\, X$$
$$(\urcorner \forall t)\, X \leftrightarrow (\exists t) \sim X$$
$$\sim(\sim X1 \vee \ldots \vee \sim X\mathrm{A}) \rightarrow X1 \cdot \ldots \cdot X\mathrm{A}$$

Из них получаем

$$(?\forall t)\, X \rightarrow \sim(X1 \cdot \ldots \cdot X\mathrm{A}) \cdot (X1 \cdot \ldots \cdot X\mathrm{A})$$

Аналогично получаем

$$(?\exists t)\, X \rightarrow \sim(X1 \vee \ldots \vee X\mathrm{A}) \cdot (X1 \vee \ldots \vee X\mathrm{A})$$

Чтобы избежать этого, надо либо отказаться от допущения неопределенности кванторов, либо в их определения внести какие-то уточнения.

Символом $\{Y\}$ будем изображать то, что возможно построить истинное Y. Высказывания с кванторами теперь можно свести к высказываниям без кванторов путем следующих соглашений:

$$D1.\ (\exists t)\,X \equiv \{X1\} \vee \ldots \vee \{XA\}$$
$$(\neg\exists t)\,X \equiv \{\sim X1\} \cdot \ldots \cdot \{\sim XA\}$$
$$(?\exists t)\,X \equiv \sim (\exists t)\,X \cdot \sim (\neg\exists t)\,X.$$
$$D2.\ (\forall t)\,X \equiv \{X1\} \cdot \ldots \cdot \{XA\}$$
$$(\neg\forall t)\,X \equiv \{\sim X1\} \vee \ldots \vee \{\sim XA\}$$
$$(?\forall t)\,X \equiv \sim (\forall t)\,X \cdot \sim (\neg\forall t)\,X.$$

Высказывания справа от $\equiv$ в определениях $D1$ и $D2$ назовем интерпретационными.

Значения истинности для высказываний с кванторами можно определить через интерпретационные высказывания или непосредственно. В первом случае можно воспользоваться определениями для структур с операторами $\sim$, $\cdot$ и :, сделав следующее добавление: если одно из $\{X\}$ и $\{\sim X\}$ истинно, то другое не является истинным; если одно из них не является истинным, значение другого остается не определенным (они оба могут оказаться неистинными). Можно убедиться в том, что теперь приведенное выше противоречие уже не получится, так как

$$(?\forall t)\,X \equiv \sim (\{X1\} \cdot \ldots \cdot \{XA\}) \cdot \sim (\{\sim X1\} \vee \ldots \vee \{\sim XA\})$$

не может быть заменено на

$$(?\forall t)\,X \equiv \sim (\{X1\} \cdot \ldots \cdot \{XA\}) \cdot (\{X1\} \cdot \ldots \cdot \{XA\}),$$

ибо $\sim \{\sim Xi\}$ не равнозначно $\{Xi\}$. Аналогично для $(?\exists t)\,X$.

Во втором случае значения истинности для высказываний с $\forall$ и $\exists$ определяются так:

1) если $(\forall t)\,X$ приписали значение v^t, то X должны приписать значение v^t; если же $(\forall t)\,X$ приписали значение nv^t, то значение X остается не определенным;

2) если мы не имеем возможности приписать X значение nv^t, то $(\forall t)\,X$ приписывается значение v^t; если же имеется возможность приписать X значение nv^t, то $(\forall t)\,X$ приписывается значение nv^t;

3) если одно из $(\forall t)\,X$ и $(\neg\forall t)\,X$ имеет значение v^t, то другое имеет значение nv^t; но если одно из них имеет значение nv^t, то значение другого остается не определенным;

4) $(?\forall t)\,X$ равнозначно $\sim (\forall t)\,X \cdot \sim (\neg\forall t)\,X$;

5) $(\exists t)\,X$ равнозначно $(\neg\forall t) \sim X$); $(\neg\exists t)\,X$ равнозначно $(\forall t) \sim X$; $(?\exists t)\,X$ равнозначно $(?\forall t) \sim X$.

§ 18. Другие формы высказываний

Те виды структур высказываний, которые мы рассмотрели, не исчерпывают всех возможных и даже фактически встречающихся структур высказываний. Однако рассмотренных структур достаточно, как нам кажется, для того, чтобы описать прочие известные структуры как производные. Примеры того, как одни структуры высказываний сводятся к другим, мы довольно в большом числе видели ранее. Они будут встречаться и в последующем изложении. Так что тезис о сводимости всего многообразия структур высказываний к небольшому числу основных форм имеет вполне реальные основания. Более того, упомянутая сводимость является непременным условием логического анализа высказываний.

Возьмем, например, высказывания, которые образуются с помощью оператора «есть». Высказывание «t^1 есть t^2» употребляется в разных смыслах:

1) как $t^1 \rightarrow t^2$, $t^1 \rightleftarrows t^2$, или даже $t^1 \equiv t^2$;

2) как «t^1 включается в класс предметов t^2» (об этом ниже);

3) как «t^1 имеет признак t^2»;

4) как «В качестве элемента из области значения t^1 взят t^2». Как самостоятельная форма, отличная от указанных в пунктах 1—4 и несводимая к ним, оно значения не имеет.

Но если даже оставить в стороне методическую установку логики на сведение многообразия каких-то явлений языка науки к некоторому единству, имеются общие соображения, делающие тезис сводимости даже тривиальным. Если нам известно, что такое элементарное высказывание, то все прочие структуры высказываний будут охвачены логическим исследованием по таким направлениям: 1) по линии рассмотрения структуры терминов; 2) по линии рассмотрения высказываниеобразующих операторов. Первая линия не затрагивает тезис сводимости. Исследование по второй линии есть исследование видов операторов, которые поддаются классификации: 1) операторы, относящиеся к терминам высказываний (кванторы); 2) операторы, соединяющие два и более высказывания в новые высказывания (конъюнкции, дизъюнкции), — коннекторы высказываний; 3) операторы, относящиеся к высказываниям в целом и к другим операторам (отрицания, неопределенности), — преобразующие операторы; 4) операторы, производные от 1—3 и их комбинаций.

Рассмотрим еще в качестве примера оператор «только» (обозначим символом O). Он может относиться как к терминам, так и к операторам, но всегда может быть определен как производный:

$$D1.\ (s \leftarrow OP^1) \equiv \sim (P^1 \rightarrow P^2) \rightarrow \sim (s \leftarrow P^2)$$

$$D2.\ ((Os^1) \leftarrow P) \equiv \sim (s^1 \rightarrow s^2) \rightarrow \sim (s^2 \leftarrow P)$$

$$D3.\ (O\exists t)\, X \equiv (\exists t)\, X \cdot (\exists t) \sim X$$

$$D4.\ (O\forall t)\, X \equiv (\forall t)\, X \cdot ((\neg \forall t)\, X \rightarrow (\neg \exists t)\, X).$$

Число возможных комбинаций операторов, позволяющих вводить новые производные операторы, в принципе не ограничено. Но практически в язык науки вводятся лишь такие, которые удобны и дают какую-то заметную выгоду.

§ 19. Проверка

*D*1. Проверка высказывания есть установление его значения истинности.

*D*2. Выбор предметов при проверке высказываний есть проверочный выбор.

Для проверки X необходимо иметь:

1) точные определения терминов значений истинности для высказываний с аналогичной структурой или с аналогичным способом получения;

2) возможность построить такие истинные $Y^1, \ldots, Y^n$ $(n \geqslant 1)$, что $Y^1 \cdot \ldots \cdot Y^n \rightarrow (X \leftarrow v^i)$.

Проверка высказываний всегда производится в определенное время (назовем его проверочным временем). Для одних высказываний проверочное время не играет никакой роли (к ним относятся все универсальные высказывания), для других оно важно. В последнем случае особый интерес представляют высказывания о будущих событиях, которые мы рассмотрим ниже.

§ 20. Локальные и универсальные высказывания

*D*1. Пусть t входит в X. Если X имеет значение истинности в сопоставлении с одним предметом, обозначаемым t, и другое — в сопоставлении с другим предметом t, то X есть локальное по t высказывание (значение истинности X зависимо от t). Если же X имеет одно и то же значение истинности в сопоставлении с любым предметом t, то X есть универсальное по t высказывание (значение истинности X не зависит от t). Высказывание локально (универсально), если и только если в него входит (не входит) термин, по которому оно локально.

Возникает, однако, вопрос: как быть с одним и тем же предметом, взятым в разное время? Если мы условимся считать, что предмет t, взятый в одно время, и предмет t, взятый в другое время, суть разные предметы, то приведенное выше определение можно оставить без корректива. Но если это соглашение не принимать, то определению надо будет придать такой вид: если X имеет одно значение в сопоставлении с одним предметом t или с предметом t, взятым в одно время, и другое значение в сопоставлении с другим t или с t, взятым в другое время, то X есть локальное по t высказывание; аналогично надо перестроить определение универсальности высказывания.

Пример локального высказывания — «Частица заряжена отрицательно» (оно истинно в сопоставлении с электроном и ложно в сопоставлении с протоном). Примеры универсальных высказываний «Электрон заряжен отрицательно» и «Электрон заряжен положительно». Первое истинно в отношении к любому электрону, а второе ложно в отношении к любому электрону. Первое универсально истинно, второе универсально ложно.

Различение локальных и универсальных высказываний имеет существенное значение для определения их значений истинности. Возьмем, например, высказывание $X : Y$. Если X и Y суть локальные высказывания, то для того, чтобы убедиться в истинности $X : Y$, необходимо следующее: 1) убедиться в том, что возможно $X \cdot \sim Y$ или $\sim X \cdot Y$, или и то и другое; 2) убедиться в том, что невозможны $X \cdot Y$ и $\sim X \cdot \sim Y$. Таким образом, если нам известно, что $(X \cdot \sim Y) \leftarrow v^t$, то мы еще не можем только на этом основании признать, что $(X : Y) \leftarrow v^t$. Если же X и Y универсальны, то для того, чтобы убедиться в истинности $X : Y$, необходимо и достаточно убедиться в истинности $X \cdot \sim Y$ или $\sim X \cdot Y$. Аналогично обстоит дело с другими высказываниями и другими значениями истинности, когда приходится для установления значения истинности перебирать две или более возможности.

В принятых нами определениях указан общий случай. Приводимые же обычно в курсах логики определения такого рода неявно или явно предполагают то, что элементарные высказывания универсальны. И благодаря этому определения принимают несколько иной вид сравнительно с тем, как они сформулированы у нас.

Законы логики имеют силу в одинаковой мере как для универсальных, так и для локальных высказываний. Только в последнем случае предполагается тождество условий проверки всех высказываний (тождество пространства и времени, предметов, с которыми сопоставляются высказывания при проверке, и т. п.), фигурирующих в одном и том же правиле логики.

Пусть V есть условие, при котором производится проверка высказывания X. В выражении «X при условии V» никакой логической связи X и V не предполагается. Ссылка на V имеет значение лишь в том случае, если в некотором утверждении A фигурирует несколько локальных высказываний X^1, ..., X^n. И тогда либо к каждому из них надо будет приписать выражение «При условии V», либо к утверждению A в целом. Ссылку на условия можно внести в субъекты высказываний, получая субъекты типа «s, выбранный при условии V». И тогда локальные высказывания становятся универсальными.

§ 21. Логически истинные высказывания

$D1$. Высказывание X будем называть логически истинным, если и только если признание истинности X есть следствие утверждений и определений логики. Это может быть один из следующих случаев: 1) в логике принято, что высказывания с такой структурой, как X, логически истинны; 2) в логике приняты определения, из которых следует, что высказывания с такой структурой, как X, логически истинны; 3) Y логически истинно, и верно утверждение $Y \rightarrow X$ в силу правил логики.

Частный случай логически истинных высказываний суть тавтологии. С точки зрения пропозициональной логики тавтологиями являются

$$X : \sim X, \ \sim(X \cdot \sim X), \ X \cdot Y : \sim X \cdot Y : X \cdot \sim Y : \sim X \cdot \sim Y.$$

С точки зрения теории условных высказываний тавтологиями являются

$$X \rightarrow X,\ X \cdot Y \rightarrow X,\ \sim X \rightarrow \sim (X \cdot Y).$$

С точки зрения теории кванторов тавтологиями являются

$$(\forall t)\,X \rightarrow X,\ X \rightarrow (\exists t)\,X,\ (\forall t)\,(X \cdot Y) \rightarrow (\forall t)\,X.$$

В приведенных примерах высказывание принимается как всегда истинное потому, что оно истинно при любых комбинациях значений высказываний, входящих в него. Но высказывания вида

$$t \rightarrow t,\ t^1 \rightarrow t^1 \cdot t^2,\ t^1 \vee t^2 \rightarrow t^1$$

и т. п. принимаются как логически истинные уже из иных соображений. Аналогично мы должны принять как логически истинные, например, утверждения «Объект s, имеющий признак P, имеет этот признак P», «Объект не может быть больше самого себя», «Всякое событие одновременно с самим собой» и т. п. Короче говоря, во всех случаях, когда в качестве логически истинных принимаются простые высказывания, они принимаются не в силу определений значений истинности, а из иных соображений.

Обычно в таких случаях ссылаются на очевидность. Это правомерно, если иметь в виду, что логическая очевидность есть лишь следствие неявных определений терминов или операторов.

Иногда логически истинные высказывания называют законами логики. Но это нелепо. Естественно, если в логике принимаются какие-то утверждения, то они считаются истинными. Но логически истинными являются какие-то высказывания, если к признанию их истинности нас вынуждают законы логики. К самим же законам логики применять такую характеристику бессмысленно. Возьмем, например, такой закон логики A: дизъюнкция любого высказывания и его внешнего отрицания логически истинна. Само это утверждение не есть логически истинное утверждение, хотя оно и выводится из определений значений истинности для высказываний с : и $\sim$. Логически истинным будет высказывание $X : \sim X$, поскольку имеется общее утверждение логики A, имеющее силу для X как для частного случая.

§ 22. Невыполнимые и выполнимые высказывания

$D1$. Если высказывание X не может быть истинным в силу законов (утверждений, правил) логики, то X будем называть невыполнимым высказыванием. Если высказывание X ложно в силу утверждений логики, то X называется логически ложным высказыванием.

Очевидно, если X логически ложно, то оно невыполнимо. Но не всегда наоборот. Например, невыполнимые высказывания $X \cdot \sim X$ и $X : X$ логически ложны, тогда как $(s \leftarrow P) \cdot (s \urcorner \leftarrow P)$ и $(\forall a) X \cdot (\urcorner \forall a) X$ суть невыполнимые высказывания, но не логически ложные. В самом деле, оба $s \leftarrow P$ и $s \urcorner \leftarrow P$ могут быть неопределенными и по определению будет неопределенной их конъюнкция.

В логике и в конкретных науках широко распространено понятие логической противоречивости. Нередко логически противоречивые высказывания отождествляют с логически ложными и невыполнимыми. Это отождествление есть естественное следствие двузначной концепции логики. Если отрицание истинности и ложность совпадают, а других значений нет, то логическая ложность и невыполнимость совпадают. Кроме того, основные понятия логики сложились под влиянием пропозициональной логики, согласно которой противоречие совпадает с логической ложностью. С точки зрения многозначной концепции логики невыполнимость и логическая ложность оказываются разными вещами. Высказывания же, которые отвергаются из-за логических соображений, не всегда суть противоречия, если иметь более широкий взгляд на логику, нежели взгляд на нее только через таблицы истинности пропозициональной логики.

$D2$. Логическое противоречие мы определим так (это вполне согласуется с принятым его синтаксическим пониманием):

1) $X \cdot \sim X$ есть логически противоречивое высказывание;

2) если $Y \rightarrow X \cdot \sim X$, то Y есть логически противоречивое высказывание.

С точки зрения такого определения примерами логического противоречия будут высказывания

$$X \cdot \sim X, \quad X \cdot \sim X \cdot Y, \quad (s \leftarrow P) \cdot (s \urcorner \leftarrow P)$$

и т. п. В первых двух противоречивость видна зрительно. В третьем же противоречивость обнаруживается через следствия. В самом деле, из признания $s \urcorner \leftarrow P$ следует признание $\sim (s \leftarrow P)$, так что имеем $(s \leftarrow P) \cdot (s \urcorner \leftarrow P) \to \to (s \leftarrow P) \cdot \sim (s \leftarrow P)$.

Логически противоречивое высказывание невыполнимо, но не обязательно логически ложно (как в случае $(s \leftarrow P) \cdot \cdot (s \urcorner \leftarrow P)$ оно может быть неопределенным).

*D*3. Высказывание *X* будем называть логически выполнимым, если в логике нет таких правил, согласно которым *X* не может быть истинным. Вопрос о том, какие высказывания логически выполнимы, решается применительно к возможностям каждого раздела логики особо. Так, если высказывание *X* элементарно, то с точки зрения пропозициональной логики оно выполнимо. С точки зрения теории кванторов будут выполнимы $(\forall t)\, X$ и $(\exists t)\, X$. С точки зрения теории условных форм будет выполнимо $Y \to X$. Но если *X* имеет вид $(s \leftarrow P \cdot \tilde{P})$, то оно невыполнимо с точки зрения теории терминов и субъектно-предикатных форм. Если *X* есть $s \leftarrow P$, где *s* и *P* суть простые термины, то с точки зрения логики оно выполнимо, хотя с точки зрения той или иной науки оно может быть ложным.

Выполнимое высказывание не является логически ложным и противоречивым. С точки зрения пропозициональной логики *X* выполнимо, если $\sim X$ не есть тавтология. Но это лишь частный случай выполнимости.

§ 23. Законы науки

Универсальные высказывания данной области науки, считающиеся истинными, но не являющиеся логически истинными (здесь употребляют выражение «фактически истинные»), суть законы данной области науки. И логический анализ законов науки сводится к анализу понятий универсальности, логической и фактической истинности, а также к анализу свойств высказываний рассмотренных выше типов.

§ 24. Прогнозы

Будем называть событием (или состоянием, в зависимости от удобства выражений) то, о чем говорится в данном высказывании. Если *X* есть высказывание, то выражение «Тот факт, что *X*» (или «То, что *X*», «То, о чем говорится в *X*» и т. п.) будет термином события (или состояния), о котором идет речь в *X*. Пусть *x* есть такой термин.

*D*1. Высказывание W, высказанное или проверяемое во время t^1, но в котором говорится о том, что событие x будет иметь место (осуществится, наступит, произойдет и т. п.) в будущем (сравнительно с t^1) в какое-то или в определенное время после t^1, будем называть высказыванием о будущем событии (предсказанием, прогнозом).

Пусть t^2 есть время, указанное в W относительно наступления x. Это может быть неопределенное «будет» («наступит») или определенное время («после такого-то времени», «от... и до...», «в такой-то момент» и т. п.). Надо различать вопрос о значениях истинности W во время t^1 и во время t^2.

Первый вопрос решается определениями:

*D*2. W истинно в t^1, если и только если имеется такое истинное V^1, что $V^1 \rightarrow W$.

*D*3. W ложно в t^1, если и только если имеется такое истинное V^2, что $V^2 \rightarrow \sim W$.

*D*4. W неопределенно в t^1, если и только если нет таких V^1 и V^2, какие указаны в *D*2 и *D*3.

Второй вопрос решается определениями:

*D*5. W истинно в t^2 (сбывается), если и только если x действительно имеет место в t^2.

*D*6. W ложно в t^2 (не сбывается), если и только если x не наступает (не существует) в t^2.

В идеальном случае между значениями истинности W в t^1 и t^2 имеет место связь:

1) если W истинно в t^1, то оно будет истинно и в t^2; если W истинно в t^2, то оно не может быть ложно в t^1;

2) если W ложно в t^1, то оно будет ложно и в t^2; если W ложно в t^2, то оно не может быть истинно в t^1.

Однако эти значения устанавливаются независимо друг от друга. Кроме того, из истинности (ложности) W в t^2 не следует истинность (ложность) его в t^1: оно могло быть неопределенно.

Когда говорят, что некто, предсказавший некоторое событие, был прав в свое время, совершают логическую ошибку. Правомерно сказать в этом случае лишь то, что этот некто оказался прав (что предсказание сбылось). А это — совсем иное дело. Во многих случаях предсказания являются лишь неопределенными для своего времени, а их обоснование (т. е. отыскание V^1) оказывается иллюзорным.

Все сказанное о предсказаниях можно распространить с некоторыми коррективами на случаи, когда высказывания относятся к прошлым событиям (t^2 предшествует t^1).

В связи с прогнозами интересно разобрать известный парадокс «чужестранец». Мы его сформулируем сначала так. Каждый чужестранец, приезжающий в страну A, должен произнести одно высказывание. Если это высказывание ложно, то чужестранца должны казнить. Один чужестранец произнес высказывание «Вы меня казните». Как должны поступить жители страны A? Если они не казнят чужестранца, значит он произнес ложное высказывание, а за ложь его должны казнить. Если же они его казнят, то он произнес истинное высказывание, и его не должны казнить.

Положение совершенно безвыходное, если не различать значения истинности прогнозирующего высказывания в то время, когда оно высказано, и в то время, к которому относится прогноз. Значение истинности прогнозирующего высказывания во время, когда оно высказано, должно быть установлено теми средствами, какими располагают предсказатели именно в это время. Жители страны A, не имея высказываний X и Y таких, что «Если X, то чужестранец будет казнен» или «Если Y, то чужестранец не будет казнен», должны признать как высказывание чужестранца, так и его внутреннее отрицание неопределенными. И тогда им следует установить, что они будут делать с чужестранцами, которые произносят неопределенные высказывания.

Аналогичный эффект получится, если мы придадим парадоксу такой вид. Чужестранец, прибывающий в страну A, должен произнести высказывание. Если это высказывание истинно, то его должны повесить, а если это высказывание ложно, то его должны утопить. Один чужестранец, приехав в A, произнес высказывание B: «Вы меня утопите». Если B истинно, то чужестранца должны повесить. Но тогда B будет ложно, и чужестранца должны утопить. Но тогда B будет истинно и т. п. Ситуация неразрешима, поскольку смешиваются значения истинности высказываний в разное время и не учитывается возможность неопределенности.

Но прогнозирующее высказывание может быть просто принято за истинное, если даже оно неопределенно с точки зрения $D4$. При этом судьба его в t^1 решается так. Пусть W^1 есть прогнозирующее высказывание, не содержащее отрицаний и знака неопределенности, а W^2 отличается от него только наличием внутреннего отрицания. Например, W^1 есть $s \leftarrow P$, а W^2 есть $s \neg\!\leftarrow P$. Возможны такие случаи:

1) если $W^1 \to \sim Y \cdot Y$ (т. е. из W^1 следует противоречие), то $\sim W^1$ истинно; но это еще не дает права принять W^2, поскольку оно может оказаться неопределенным;

2) если $W^2 \to \sim Z \cdot Z$, то $\sim W^2$ истинно; но это не дает права признать истинным W^1;

3) если имеет место 1 и 2, то истинно $\sim W^1 \cdot \sim W^2$, т. е. оба W^1 и W^2 неопределенны;

4) если принятие W^1 (или W^2) не ведет к противоречию, вопрос о его принятии решается в зависимости от учета соотношения обстоятельств, свидетельствующих в его пользу (обстоятельств «за»), и обстоятельств, свидетельствующих против него (обстоятельств «против»), а также от соотношения вытекающих из него следствий «за» и следствий «против».

Проблема значений истинности прогнозов была одним из источников критики двузначной логики и идей многозначной логики. При этом было высказано мнение, будто закон исключенного третьего $X \vee \sim X$ не имеет силы для прогнозирующихся высказываний. Однако это мнение нельзя считать верным. Сколько бы значений истинности мы ни приписывали высказыванию W, для него имеет силу правило: оно либо истинно, либо не является истинным. В частности, если оно неопределенно, оно не является истинным. Так что утверждение $W \vee \sim W$ будет логически истинно, если принято по определению: $\sim X$ истинно, если и только если X не является истинным (в частности, ложно или неопределенно). Не будет логически истинным другое утверждение, а именно $W^1 \vee W^2$, в частности $(s \leftarrow P) \vee (s \neg \leftarrow P)$. В самом деле, если сегодня высказано «Завтра будет морское сражение или завтра не будет морского сражения», то это высказывание будет неопределенным, если неопределенны образующие его части. Но утверждение «Завтра будет морское сражение или неверно, что завтра будет морское сражение» будет истинно: если высказывание «Завтра будет морское сражение» неопределенно, то высказывание «Неверно, что завтра будет морское сражение» истинно. Таким образом, закон исключенного третьего $X \vee \sim X$ сохраняет значение и для высказываний W.

Глава четвертая

ЛОГИЧЕСКОЕ СЛЕДОВАНИЕ

Общеизвестно, что значительная часть утверждений науки получается путем логического вывода из других утверждений. Общеизвестно также, что вопрос о том, когда одни утверждения логически выводятся (логически следуют, получаются по правилам логики, дедуцируются и т. п.) из других, получил разработку как основной вопрос особой науки — науки логики. И казалось бы теперь читателя, интересующегося этим вопросом, достаточно отослать к учебникам логики и книгам, дающим более или менее полное изложение теории вывода. Однако имеется ряд обстоятельств, позволяющих говорить о проблеме логического следования. Эти обстоятельства связаны, как уже отмечалось в первой главе, с особенностями методов современной логики. Рассмотрим их подробнее. Это важно не только как иллюстрация применения методов современной логики к анализу науки, но и для понимания природы правил логического следования.

Тот факт, что из X логически следует Y, будем записывать в форме

$$X \vdash Y$$

Раздел логики, в котором рассматриваются правила логического следования для высказываний с операторами «и», «или» и «не», будем называть общей теорией логического следования. Проблема логического следования в характерном для современной логики виде сложилась именно на уровне общей теории логического следования.

§ 1. Классическая теория следования

Правила логического следования вырабатываются с таким расчетом, чтобы из истинных посылок получались истинные следствия. Для современной логики характерно то, что класс этих правил устанавливается посредством тех или иных интерпретаций логических исчислений. Так, класс правил логического следования для высказываний, построенных из простых высказываний с помощью операторов «не», «и», «или» и т. п., может быть определен посредством классической пропозициональной логики.

Под классической пропозициональной логикой мы здесь имеем в виду следующее:

1) функционально полные двузначные матричные (истинностные) построения, — двузначную пропозициональную алгебру;

2) аксиоматические построения (системы гильбертовского типа), дедуктивно эквивалентные двузначной пропозициональной алгебре, и вообще любые формальные системы, дедуктивно эквивалентные классическим аксиоматическим построениям (например, некоторые системы генценовского типа), — классические пропозициональные исчисления.

Проблема логического следования в ее специфической для современной логики форме и возникла в связи с интерпретацией классической пропозициональной логики в качестве общей теории дедукции.

Упомянутая выше интерпретация состоит в следующем:

1) пропозициональные формулы рассматриваются как высказывания;

2) знаки конъюнкции, нестрогой дизъюнкции и отрицания рассматриваются соответственно как «и», «или» (неисключающее) и «не»;

3) значения пропозициональных формул рассматриваются как истинность и ложность высказываний.

При такой интерпретации обнаруживается следующее свойство знака материальной импликации: если $X \supset Y$ истинно и X истинно, то Y истинно. Оно позволяет рассматривать этот знак как знак логического следования. В результате тавтологии двузначной алгебры доказуемые формулы классического исчисления, содержащие знак материальной импликации, получают интерпретацию как правила логического следования. Классическая пропозициональная логика здесь рассматривается как общая теория логического следования (вывода, дедукции). Эта концепция является в известном смысле доминирующей.

Классическая общая теория логического следования непротиворечива и полна во всех рассматриваемых в логике смыслах. В том числе, если присоединить к числу ее аксиом формулу, которая недоказуема в ней, то полученная система будет противоречивой. Ее, таким образом, нельзя расширить без противоречия, — она является максимально широкой. Слово «общая» здесь не несет никакой иной нагрузки, кроме указания на то, что в этом разделе теории логического следования рассматриваются лишь правила следования для логических операторов «и», «или», «не» и производных от них операторов.

§ 2. Критика классической теории логического следования

В нашу задачу не входит обсуждение достоинств классического понимания логического следования. Для нас здесь интерес представляет прежде всего одно из направлений его критики. Исходная и простейшая форма этой критики заключается в следующем. Возьмем материальную импликацию в том виде, как она определена в двузначной алгебре. С точки зрения принятой интерпретации выражение $X \supset Y$ выступает как функция истинности высказываний X и Y: для установления того, имеет место (истинно) $X \supset Y$ или нет, достаточно выяснить значения истинности X и Y. По определению если истинно Y, то истинно $X \supset Y$ при любом X; если ложно X, то истинно $X \supset Y$ при любом Y. Например, истинны импликации «$2 \times 2 \neq 4$» $\supset$ «Земля — куб», «$2 \times 2 \neq 4$» $\supset$ «Атом делим», «$2 \times 2 \neq 4$» $\supset$ «$2 \times 2 = 4$» и т. п. Будем теперь интерпретировать знак материальной импликации как знак логического следования, т. е. примем утверждение: «Если истинно $X \supset Y$, то $X \vdash Y$». При такой интерпретации мы получим, что:

1) из ложного высказывания следует любое высказывание (все что угодно);

2) истинное высказывание следует из любого высказывания.

Аналогичный результат получается несколько иным путем. Возьмем, например, доказуемые формулы (или, соответственно, тавтологии) классической логики

$$X \supset (Y \supset X), \quad \sim X \supset (X \supset Y).$$

Будем интерпретировать их как правила логического следования. При этом получаются следующие следствия:

1) если X истинно, то $Y \vdash X$, где Y есть любое высказывание (т. е. истинное высказывание следует из любого);

2) если X ложно, то $\sim X$ истинно, и $X \vdash Y$, где Y есть любое высказывание (т. е. из ложного высказывания следует любое).

Сформулированные выше последствия интерпретации материальной импликации получили название «парадоксов материальной импликации». Подчеркиваем, что речь здесь идет не о парадоксальности классической логики (она непротиворечива), а о несоответствии приведенной ее интерпретации некоторому интуитивному (привычному, сложившемуся независимо от классической логики и до нее) пониманию логического следования. Это понимание, очевидно, включает в себя не только требование, чтобы из истинных посылок получились истинные следствия (этому требованию материальная импликация удовлетворяет), но что-то еще дополнительно. Иначе ни о каком несоответствии и речи быть не может. Это «что-то» называют связью высказываний по смыслу (или по содержанию). Понятие смысла, однако, при этом остается не определенным.

Навыки получения одних высказываний из других чисто логическим путем (т. е. навыки умозаключений, рассуждений, вывода и т. п.) у людей складываются так, что для осуществления самих актов вывода (переходов от данных высказываний к вытекающим из них следствиям) не имеет значения, истинны или нет посылки. Какие следствия получаются из данных посылок, зависит от того, какие термины, высказывания и логические операторы входят в их состав и как они расположены друг относительно друга. Если дана некоторая посылка (совокупность посылок), то не любые высказывания можно получить из нее в качестве следствий, если даже со временем она и окажется ложной. Аналогично не из любой посылки может быть выведено данное следствие, если даже оно и окажется истинным. Так, нет таких правил, которые позволяют из высказывания «$2 \times 2 = 4$» получать как логическое его следствие высказывания «Электрон заряжен отрицательно», «Электрон заряжен положительно», «Земля имеет форму куба», «Товары имеют стоимость» и т. п. Точно так же нет таких правил, которые позволяют рассматривать высказывание «$2 \times 2 = 4$» в качестве логического следствия из приведенных выше высказываний.

Если дано высказывание X и поставлена задача вывести из него допустимые следствия или установить возможные посылки, следствием которых оно является, то для решения этой задачи мы занимаемся прежде всего не проверкой X, а изучением его структуры. И лишь после того, как мы эту задачу решили (допустим, установили, что имеет место $X \vdash Y$ или $Z \vdash X$), может приобрести значение вопрос об истинности и ложности X: если X истинно, то мы принимаем за истинное Y; если X ложно, мы отвергаем Z как ложное. В парадоксах же дело обстоит наоборот: значение истинности X известно заранее, причем X ложно как посылка и истинно как следствие.

Конечно, «парадоксы» материальной импликации практически не ведут к отрицательным последствиям в познании. И в этом смысле те авторы, которые не разделяют идей данного направления критики классической логики, правы. Если даны некоторые высказывания, значения истинности которых неизвестны, и требуется отыскать их возможные следствия или посылки, из которых они могут быть получены, то парадоксальные утверждения практически бесполезны (не могут быть использованы). Если же значения истинности их известны, то они точно так же теряют практический смысл: заведомо ложные посылки не могут быть приняты в качестве основы для дедукции, а заведомо истинные высказывания остаются истинными, какие бы высказывания мы ни объявили посылками для них. Однако факт остается фактом: нет полного совпадения материальной импликации и логического следования; не всякая истинная материальная импликация может быть истолкована как логическое следование; не всякая доказуемая формула (или тавтология) со знаком материальной импликации может быть истолкована как правило логического следования; общие свойства логического следования не ограничиваются тем, что выполняются требования «Из истинных посылок истинные следствия» и «Если ложны следствия, то ложны посылки».

Так как классическая логика синтаксически полна (и класс доказуемых формул или тавтологий с материальной импликацией в ней максимально широк), то естественно намечается и путь, по которому надо идти в поисках логической системы, адекватной логическому следованию (формализующей последнее): сужение классической логики.

Классическая логика подвергается критике и сужается также по другим линиям. Это — интуиционистское (конструктивистское) направление в логике и попытки построения «логики микромира» («логики квантовой механики»). Эти направления критики исходят из иных источников и имеют иные цели, чем интересующее нас направление. Они оставляют без внимания «парадоксы» материальной импликации (и другие аналогичные им), зато подвергают сомнению и исключают формулы классической логики, приемлемые в плане проблемы логического следования. Так, в интуиционистской логике доказуемы формулы

$$X \supset (Y \supset X), \quad \sim X \supset (X \supset Y),$$

но недоказуемы формулы

$$X \vee \sim X, \quad \sim\sim X \supset X$$

(закон исключенного третьего и снятия двойного отрицания). В логических системах, соответствующих по идее «логике микромира», исключаются какие-либо из формул типа

$$X \vee \sim X, \quad X \cdot Y \supset Y \cdot X, \quad X \cdot (Y \vee Z) \supset X \cdot Y \vee X \cdot Z$$

и т. п., но сохраняются формулы, порождающие «парадоксы» материальной импликации.

§ 3. Строгая импликация

Парадоксы материальной импликации исключаются в системе, получившей название системы строгой импликации.

Тот факт, что X строго имплицирует Y, обозначается символом

$$X \prec Y$$

В системе строгой импликации не являются доказуемыми формулы $X \prec Y$ такие, что в Y имеется знак строгой импликации, а в X нет: среди аксиом такие формулы отсутствуют, а правила вывода не дают возможности их получить. Отсюда получаем, что формулы

$$X \prec (Y \prec X), \quad \sim X \prec (X \prec Y)$$

в системе строгой импликации не являются доказуемыми. Формулы $X \prec Y$ не рассматриваются как функции истинности от X и Y. Так что при интерпретации строгой импликации в качестве логического следования исключены последствия, подобные «парадоксам» материальной импликации.

Но в системе строгой импликации доказуемы формулы

$$\sim X \cdot X \prec Y, \quad Y \prec \sim(\sim X \cdot X).$$

Поскольку $\sim X \cdot X$ невозможно, а $\sim(\sim X \cdot X)$ необходимо, то при интерпретации строгой импликации в качестве логического следования получаем:

1) из невозможного высказывания следует любое;

2) необходимое высказывание следует из любого.

Эти утверждения получили название «парадоксов строгой импликации».

Некоторые авторы отрицают парадоксальность таких формул, которые рассмотрены выше, и не различают логическое следование и строгую импликацию как логические формы. Они признают (в крайнем случае) лишь различие этих форм в отношении к полезности. Парадоксальные строгие импликации считаются бесполезными для вывода: если X невозможно, мы не можем использовать $X \prec Y$ как основание для доказательства Y; если Y необходимо, то не требуется никаких посылок для его принятия, и X излишня. Однако большинство авторов считают, что строгая импликация все еще шире логического следования, и для построения логической системы, адекватной последнему, необходимо идти по пути исключения также и «парадоксов» строгой импликации.

Другой существенный недостаток строгой импликации — принятие модальных понятий «возможно» и «необходимо» в качестве первично ясных. На самом же деле эти понятия таковыми не являются, для их определения (т. е. для описания свойств содержащих их высказываний) требуется общая теория дедукции. Проблема логического следования сначала должна быть решена для любых высказываний на уровне общей теории (т. е. независимо от модальных понятий и без использования их), и полученное решение затем может быть использовано для определения класса правил логического следования модальных высказываний.

Исправлением недостатков системы строгой импликации явились системы сильной импликации. Сильная импликaция $X \to Y$ читается как «Y есть часть содержания X». Модальные понятия вводятся как производные. Понятия «содержание» и «часть содержания» не разъясняются.

Системы сильной импликации обладают следующими свойствами:

1) если в формуле $X \to (Y \to Z)$ знак импликации отсутствует в X, то эта формула недоказуема;

2) если в формуле $X \to Y$ формулы X и Y таковы, что в них нет одинаковых переменных, то эта формула недоказуема. Отсюда следует, что формулы

$$X \to (Y \to X), \quad \sim X \to (X \to Y),$$
$$X \cdot \sim X \to Y, \quad X \to \sim (Y \cdot \sim Y)$$

недоказуемы. А значит «парадоксы», подобные «парадоксам» материальной и строгой импликаций, при интерпретации систем сильной импликации в качестве теории логического следования получиться не могут.

Но в системах сильной импликации оказываются недоказуемыми некоторые формулы, не являющиеся «парадоксальными». Так, формула

$$(X \vee Y) \cdot \sim X \to Y$$

вполне приемлема с интуитивной точки зрения, но она недоказуема в упомянутых системах. Таким образом, прогресс в одном отношении (исключение «парадоксальных» формул) оказался регрессом в другом (исключение «непарадоксальных» формул), и проблема логического следования встает снова, только уже в несколько иной и более сложной форме.

§ 4. Новая постановка проблемы

Пусть построена логическая система, в которой не являются доказуемыми формулы, ведущие к «парадоксам» типа «парадоксов» материальной и строгой импликации. Вполне правомерны следующие вопросы:

1) имеются ли какие-либо гарантии того, что исключение этих «парадоксальных» формул из числа доказуемых означает исключение «парадоксальных» формул вообще; т. е. имеются ли гарантии, что все доказуемые в этой системе формулы при интерпретации их в качестве правил логического следования удовлетворяют интуиции?

2) имеются ли какие-либо гарантии, что исключение «парадоксальных» формул из числа доказуемых не ведет к исключению формул, не являющихся «парадоксальными» с точки зрения интуиции?

Вернемся, например, к формуле

$$(1)\ (X \vee Y) \cdot \sim X \rightarrow Y$$

которая недоказуема в системах сильной импликации. При интерпретации ее в качестве правила логического следования получаем утверждение: «Если X или Y, и при этом не-X, то отсюда следует, что Y». Оно вполне согласуется с интуицией, с привычным пониманием следования. Не вызывают сомнения и правила дистрибутивности (2) и транзитивности (3):

$$(2)\ X \cdot Y \vee X \cdot Z \rightarrow X \cdot (Y \vee Z)$$

$$(3)\ (X \rightarrow Y) \cdot (Y \rightarrow Z) \rightarrow (X \rightarrow Z).$$

Используя формулы 1—3 и формулу

$$(4)\ X \rightarrow X \vee Y,$$

мы получим «парадоксальную» формулу

$$\sim X \cdot X \rightarrow Y.$$

Очевидно среди использованных формул имеется такая, которую надо исключить из числа приемлемых как «парадоксальную». Но почему надо исключить формулу 1, а не формулу 4? Формула 4 вызывает сомнение хотя бы потому, что в ней появляется Y, отсутствовавшее в посылке. Почему же отдается предпочтение формуле 4, а не формуле 1?

К сформулированным выше вопросам можно добавить еще такие:

3) можно ли ввести какие-то общие определения, с помощью которых мы относительно любой формулы могли бы сказать, «парадоксальна» она или нет (а не ограничиваться перечислением лишь некоторых определенных формул как «парадоксальных»)?

4) можно ли построить логическую систему, в которой исключаются все «парадоксальные» формулы и сохраняются все «непарадоксальные», или здесь неизбежны какие-то жертвы (как в приведенном выше примере с формулой 1)?

Наконец, остается в силе вопрос:

5) «парадоксальные» формулы играют полезную роль в логике и должны быть как-то сохранены; как это сделать в связи с решением проблемы логического следования?

Совершенно ясно, что ответить на поставленные вопросы невозможно без предварительного анализа интуитивного понимания логического следования, без предварительного определения последнего, без выяснения происхождения правил логического следования и предварительного описания класса этих правил. В результате такого предварительного исследования логического следования должны быть выработаны совершенно четкие критерии, в соответствии с которыми оценивались бы имеющиеся логические системы или создавались новые с заранее заданной установкой соответствовать им.

§ 5. Высказывания о следовании

Мы рассмотрим основные стороны проблемы логического следования и сделаем ряд замечаний, которые необходимы для того, чтобы оправдать или, во всяком случае, пояснить нашу теорию логического следования.

Записывая тот факт, что из высказывания X логически следует высказывание Y, в форме $X \vdash Y$, мы тем самым пишем высказывание «Из X логически следует Y». И теория логического следования состоит из такого рода высказываний. Естественно, надо совершенно отчетливо представлять себе, что это за высказывания.

Высказывание $X \vdash Y$ («Из X логически следует Y») есть элементарное высказывание, каким бы странным это наше заявление ни оказалось на первый взгляд (ведь в него явным образом входят высказывания X и Y). Дело в том, что частями этого высказывания являются не сами высказывания X и Y, а термины $[X]$ и $[Y]$, обозначающие их. Символ $\vdash$ здесь является не оператором, соединяющим высказывания X и Y, а двухместным предикатом «из первого высказывания логически следует второе». Так что рассматриваемые высказывания фактически имеют структуру

$$([X],\ [Y]) \leftarrow (\vdash).$$

И только для того, чтобы «приблизить» запись к привычному литературному языку, мы записываем их в форме $X \vdash Y$. Таким образом, рассматривать высказывания о логическом следовании одних высказываний из других как сложное высказывание ошибочно. В $X \vdash Y$ говорится не о тех предметах, к которым относятся X и Y, а о связи самих

X и Y как особых предметов. Оно есть метавысказывание по отношению к X и Y.

Хотя сказанное очевидно, это свойство высказываний $X \vdash Y$ удивительным образом игнорируется во всех известных нам работах по теории логического следования. Об этом говорит то, что для $X \vdash Y$ в качестве средства экспликации ищут всякого рода импликации (и прежде всего $X \supset Y$), интерпретируемые как сложные высказывания, путают $X \vdash Y$ с условным высказыванием $X \rightarrow Y$ и т. д. Об этом говорит и вид формул логических систем, которые предлагают в качестве средства определения правил логического следования.

Как бы точно ни совпадали свойства каких-то сложных высказываний с высказываниями о следовании, это ни в коем случае не отменяет того, что высказывания вида $X \vdash Y$ суть элементарные, а не сложные высказывания. И никакая теория сложных высказываний не может быть их теорией. Высказывания $X \rightarrow Y$ и $X \supset Y$, имея нечто общее с $X \vdash Y$, принципиально отличаются от последнего.

Для общей теории логического следования из сказанного вытекает следующее: поскольку субъектно-предикатное строение высказываний здесь не рассматривается, в правилах $X \vdash Y$ в X и в Y не должен фигурировать предикат $\vdash$. Поэтому если некоторая данная логическая система интерпретируется как общая теория логического следования, то лишь один знак в ее доказуемых формулах может рассматриваться как знак следования. И если в таких формулах знак, интерпретируемый как знак следования, встречается более одного раза, то прочие его вхождения должны получить какую-то иную интерпретацию.

§ 6. Основной принцип дедукции

Правила логического следования вырабатываются с таким расчетом, чтобы из истинных посылок получались истинные следствия. Когда эти правила уже выработаны и известны исследователю, то отношение переворачивается и приобретает силу следующий принцип: если $X \vdash Y$ и при этом X истинно, то Y истинно; если $X \vdash Y$ и при этом Y неистинно, то X неистинно. Будем этот принцип называть основным принципом дедукции. Благодаря ему исследователь принимает следствия истинных посылок и отвергает посылки неистинных следствий. И этим роль основного принципа дедукции полностью исчерпывается.

В число правил логического следования основной принцип дедукции не включается. Он есть условие изобретения и применения правил логического следования, и не более того. Поэтому в логической системе, определяющей класс правил логического следования, в числе доказуемых формул не должны быть формулы, интерпретируемые как

$$X \cdot (X \vdash Y) \vdash Y.$$

Во-первых, такого рода формулы не устраняют необходимости основного принципа дедукции. Чтобы воспользоваться такого рода формулой, все равно необходимо признание истинности посылки $X \cdot (X \vdash Y)$, чтобы признать истинным Y. Но если мы признали $X \cdot (X \vdash Y)$, то и без формулы $X \cdot (X \vdash Y) \vdash Y$ на основании основного принципа дедукции мы имеем право признать Y. Так что эти формулы излишни. Это во-вторых.

Правила логического следования позволяют сказать, что из X логически следует Y. Но процесс получения Y не ограничивается этим: необходимо осуществить признание Y, оставив X как нечто уже отработанное. Основной принцип дедукции обеспечивает поступательность (этапность) процессов рассуждения.

§ 7. Логическое следование и значения истинности высказываний

Логическое следование нередко определяют так: из X логически следует Y, если и только если всегда, когда истинно X, истинно и Y. Это определение несостоятельно по следующим соображениям. Во-первых, оно не конструктивно в том смысле, что не определяет класс случаев, когда это имеет место. В качестве же определения класса случаев логического следования одних высказываний из других при этом указывают тавтологии двузначной логики или, соответственно, доказуемые формулы классического исчисления высказываний с материальной импликацией со всеми вытекающими отсюда последствиями (парадоксы материальной и строгой импликации).

Но и независимо от упомянутых парадоксов здесь даже нет совпадения приведенного определения и фактически указываемого класса правил логического следования. Так, в формуле $X \supset Y \vee \sim Y$ для истинности $Y \vee \sim Y$ требуется истинность Y или $\sim Y$, а не истинность X; в формуле $\sim X \cdot X \supset Y$ для истинности $\sim X \cdot X$ необходима истинность обоих $\sim X$ и X, что не имеет никакого отношения к истинности Y. Кроме того, если учесть, что $\sim X \cdot X$ вообще не может быть истинным, то выражение «всегда, когда истинно $\sim X \cdot X$» оказывается двусмысленным. Короче говоря, приведенное в начале параграфа определение оказывается ни к чему не обязывающей фразой.

Между высказываниями, далее, X и Y может иметь место зависимость, вполне удовлетворяющая критикуемому определению логического следования, но между X и Y не будет никакого отношения логического следования. Так обстоит дело в случаях условных высказываний $X \rightarrow Y$, которые являются результатом опытного исследования, принимаются как аксиомы или суть части или следствия определений.

Определить логическое следование — значит буквально перечислить случаи, когда одни высказывания логически следуют из других, т. е. перечислить правила логического следования. При этом необходимо учитывать отношения высказываний по значениям истинности, чтобы был выполнен основной принцип дедукции. Но это — условие выработки правил логического следования, а не их определение. Кроме того, это — одно из условий. Оно необходимо, но не достаточно.

В каждом разделе логики класс правил логического следования устанавливается применительно к тем структурам высказываний, которые рассматриваются в этом разделе. Для этих структур вводятся определения значений истинности, так что использование этого условия проблемы не представляет.

Принципиальное значение имеет тот факт, что число значений истинности никак не влияет на класс правил логического следования: для установления последних важно только то, чтобы из истинных посылок получались истинные следствия, а какие еще возможны значения истинности, кроме истинности и ее отрицания, никакой роли не играет.

§ 8. Логическое следование и смысл высказываний

Выше мы уже говорили, что высказывания в случае логического следования связаны по смыслу, но понятие смысла было не определено. Так как мы уже рассмотрели, что такое смысл высказывания, то теперь имеем возможность высказать ряд положений на этот счет.

Прежде всего связи высказываний по смыслу разнообразны. В частности, имеет место такая зависимость: чтобы знать смысл одного высказывания, необходимо знать смысл другого. С этой точки зрения связь высказываний $X \cdot Y$ и X совершенно аналогична связи высказываний $X \vee Y$ и X, а также $X \supset Y$ и X. И никакого отношения к логическому следованию такие смысловые связи высказываний не имеют.

Остаются такие случаи, когда одни высказывания тождественны по смыслу другим. Эти отношения высказываний действительно должны приниматься во внимание при установлении класса правил логического следования. Но и в этом случае нужны оговорки, практически исключающие возможность определения логического следования через такого рода смысловые отношения высказываний.

Во-первых, не все случаи логического следования можно свести к тождеству высказываний по смыслу. Например, из $X \cdot Y$ логически следует X, но $X \cdot Y$ не тождественно по смыслу с X; из допущения необходимости некоторого события логически следует его возможность, но высказывание о необходимости события не тождественно по смыслу высказыванию о возможности этого же события и т. д. Выражения «часть смысла», «часть содержания», «содержится по смыслу» и т. п. в таких случаях либо сами туманны и бессмысленны, либо обозначают смысловые зависимости, с точки зрения которых $X \cdot Y$, $X \vee Y$, $X \supset Y$ и т. п. не различаются.

С другой стороны, не всегда тождество высказываний по смыслу означает, что эти высказывания связаны как посылки и следствия. Мы уже говорили, что тождество по смыслу используется как средство определения. И это средство может быть использовано как частное соглашение в данной науке, не имеющее общелогического смысла.

При установлении класса правил логического следования необходимо учитывать тождество высказываний по смыслу только в строго определенных случаях, а именно когда оно позволяет определить смысл высказываний с одной структурой через высказывания с другой структурой, определить одни логические операторы через другие, свести сложные конструкции высказываний к стандартным основным формам и т. п. И в каждом разделе логики эти случаи должны быть известны заранее при построении правил логического следования в этом разделе.

Наконец, когда одни высказывания получаются из других по правилам логического следования, то вторые получаются буквально из материала первых, т. е. из терминов и высказываний, входящих в структуру первых. И это обстоятельство так или иначе влияет на интуитивное понимание логического следования. Так, отвергая формулу $X \vdash Y \vee \sim Y$ как правило логического следования, неявно предполагают то, что в посылке и заключении должно быть какое-то сходное «вещество» — термин или высказывание.

*D*1. Будем называть собственными единицами смысла данного высказывания термины и простые высказывания, входящие в него. Между высказываниями имеют место смысловые отношения, которые характеризуются отношением множеств их собственных единиц смысла. Эти смысловые отношения поддаются строгой классификации: множества собственных единиц смысла двух высказываний могут совпадать, иметь по крайней мере один общий элемент, не иметь общих элементов; возможно, что одно из этих множеств включается в другое, что эти множества перекрещиваются.

В зависимости от того, какое требование будет предъявлено к посылкам и следствиям с этой точки зрения, получим разные формы логического следования. В частности, если множество собственных единиц смысла следствия включается в множество собственных единиц смысла посылки, то получим одну форму логического следования. Если же посылка и следствие содержат хотя бы одну одинаковую единицу смысла, то будет иметь место другая форма логического следования.

Если требование, чтобы из истинных посылок получались истинные следствия, выполняется в отношении всех форм следования, то в отношении множества единиц их смысла возможны вариации. И ни одна из них сама по себе не лучше и не хуже других. Просто они суть различные формы следования. И в природе нигде нет никакого подлинного следования, с которым можно было бы их сравнивать. Другое дело, какие-то из них чаще употребляются, чем другие. Но это ничего не говорит об их «правильности», «непарадоксальности», «неправильности», «парадоксальности» и т. п. Проблема логического следования, таким образом, принимает такой вид: можно ли построить логические системы, адекватные этим формам следования?

§ 9. Определения логических операторов

Так откуда же в конце концов берутся правила логического следования и что они из себя представляют? Открываются в окружающей человека природе подобно тому, как открываются законы физики, биологии и т. п.? Ничего подобного. Они изобретаются людьми вместе с изобретением логических операторов, входящих в структуру высказываний. Одни высказывания следуют из других в силу того, что таковы логические операторы, входящие в их структуру (потому что эти логические операторы были изобретены именно такими). Сила законов вывода — сила наших собственных соглашений относительно свойств логических операторов. И только потому, что исторически они складывались неявно и стихийно, а каждому отдельному индивиду навязывались как нечто независящее от его воли, они воспринимались как нечто подобное законам природы.

Надо различать:

1) установление свойств (введение, изобретение) логических операторов в истории человечества, когда этот процесс протекал стихийно, неявно и т. п.;

2) установление свойств логических операторов в логике.

Во втором случае особого рода специалисты — логики не просто пассивно описывают исторически сложившееся в языке положение, но по необходимости продолжают изобретательскую деятельность человечества: выявляют свойства операторов в неявных случаях, устраняют многозначность, устанавливают отношения различных операторов. Они совершенствуют то, что имеется. И, что особенно характерно для современной логики, предлагают нечто новое: таковы многочисленные логические системы современной логики.

Таким образом, «парадоксы» логического следования возникают не потому, что есть какие-то природные формы логического следования, которые специалисты логики никак не могут описать достаточно точно, а прежде всего потому, что в современной логике изобретаются логические формы, отличающиеся от тех, которые уже встречаются в обиходе, и буквально вновь устанавливаются точные отношения различных форм. Здесь несоответствие такого же рода, как несоответствие между дикими видами яблони и теми их видами, которые выведены человеком путем искусственного отбора и вообще посредством каких-то других приемов их усовершенствования.

Одна из черт стихийной выработки правил логического следования — отсутствие дифференциации различных логических форм. Вторая причина «парадоксов» логического следования — отсутствие подобной дифференциации в самой логике, претендующей на экспликацию правил логического следования: логическая система, удовлетворяющая свойствам одной его формы, не удовлетворяет другой, а смешение этих форм порождает иллюзию парадоксальности этой системы вообще.

Соглашения о свойствах логических операторов не являются абсолютно произвольными. Они вырабатываются в определенных рамках. И эти рамки мы рассмотрели выше: фактически сложившиеся навыки людей, отношения высказываний по значениям истинности и по смыслу и т. д. Правила логического следования дают определения логических операторов, синтезируя различные стороны их употребления и их отношения, устанавливая согласованность этих сторон.

Особенность логических операторов состоит в том, что их свойства нельзя определить отдельно от высказываний (и терминов), в которые они входят. Определить эти операторы — значит определить свойства высказываний (и терминов), содержащих их. Поэтому определения их и принимают форму правил логического следования.

Решение проблемы логического следования, таким образом, заключается не в том, чтобы отыскать абсолютно точное (адекватное) формальное определение какого-то «истинного», «настоящего», «природного» и т. п. логического следования, которого на самом деле не существует. Решение ее заключается в том, чтобы: 1) осуществить экспликацию некоторого интуитивного (привычного, стихийно сложившегося) понимания некоторых логических форм; 2) осуществить экспликацию именно различных логических форм, установить их точные различия и взаимоотношения; 3) построить различного рода формальные системы, соответствующие им, исследовать их свойства и взаимоотношения. Короче говоря, решением проблемы логического следования в конечном счете является более детальная и более дифференцированная, чем это имело место в классической логике, разработка логического аппарата в рассматриваемом направлении. Что касается стремления избежать «парадоксов» материальной и строгой (и какой-либо иной) импликаций, то это есть лишь первоначальная и наиболее поверхностная постановка проблемы.

§ 10. Экспликация интуиции

Все то, что мы говорили выше, суть лишь методические установки, с которыми должен считаться профессионал логик, разрабатывающий теорию логического следования. Но эти установки полезно знать и «потребителям» логики, поскольку описание их — единственно возможный путь описать происхождение и природу правил логического следования. А последние полезно знать хотя бы для того, чтобы не питать сильно преувеличенных иллюзий относительно возможностей логики и не мистифицировать ее законы.

Результатом экспликации употребляемых логических операторов является некоторая конечная система утверждений о логическом следовании одних высказываний из других. Эта система должна быть достаточной для осмысленного оперирования логическими операторами во всех возможных случаях их употребления. Она образует основание для общей теории логического следования. Но здесь возможны вариации. Они касаются отбора логических операторов, разделения их на основные и производные, отбора определяющих их утверждений и вообще отбора принимаемых утверждений, а также формулировок общих требований к ним.

Условимся использовать для сокращения символы вида

$$X \dashv\vdash Y,$$

если имеет место $X \vdash Y$ и $Y \vdash X$.

Мы принимаем в качестве основных логических операторов $\cdot$, $:$ и $\sim$. Их свойства определяются следующей системой утверждений, дающей первоначальную экспликацию их интуитивного понимания:

$$X \dashv\vdash \sim\sim X, \quad X \cdot Y \vdash X, \quad X \cdot Y \vdash Y \cdot X, \quad (X : Y) \cdot X \vdash \sim Y$$

и т. п. (дается полный список, учитывающий всевозможные комбинации операторов и высказываний).

Эта система обладает следующим свойством: все утверждения вида $X \vdash Y$, образующие ее, характеризуются тем, что в заключение Y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в посылке X. Будем такое логическое следование называть сильным или узким.

Если к приведенным утверждениям добавить еще одно

$$\sim X \vdash \sim (X \cdot Y),$$

то получим систему, определяющую ослабленное или расширенное логическое следование. Эта система обладает таким свойством: во всех ее утверждениях $X \vdash Y$ в X и Y входит по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание.

§ 11. Аксиоматизация

При аксиоматизации общей теории логического следования должны быть выполнены условия: 1) в аксиоматическом построении должны быть доказуемы все приведенные выше утверждения, — оно должно соответствовать интуитивному пониманию логического следования; 2) в аксиоматическом построении должны быть доказуемы не любые утверждения (кроме приведенных), но лишь утверждения, удовлетворяющие некоторым требованиям на отношения единиц смысла, входящих в посылки и заключения. И в зависимости от этих требований возможны различные аксиоматические построения, дающие определения различных форм логического следования.

При аксиоматизации некоторое число утверждений вида $X \vdash Y$ выбирается в качестве основных (аксиомы) и указываются правила, с помощью которых из них можно получить остальные утверждения такого рода.

Аксиоматизация теории логического следования еще не есть ее формализация. В аксиоматической системе речь идет все еще о высказываниях с определенными логическими операторами. Это — теория, описывающая свойства высказываний некоторого заданного вида и содержащих их операторов. При формализации же отвлекаются от значения употребляемых символов (букв), рассматривая их не как обозначения высказываний и логических операторов, а просто как особого рода объекты.

§ 12. Теория сильного логического следования

Ниже мы охарактеризуем общую теорию логического следования применительно к целям данной книги. При этом мы будем в качестве основных операторов использовать $\cdot$, $\vee$ и $\sim$, поскольку системы с оператором $\vee$ выглядят несколько проще, чем с оператором : . Но это принципиального значения не имеет, так как соответствующие системы эквивалентны с точки зрения определяемых ими классов правил логического следования.

Система S^s сильного логического следования имеет такой вид:

Алфавит:

1) буквы p, q, r с индексами и без индексов — элементарные высказывания;

2) $\cdot$, $\vee$, $\sim$ — логические операторы («и», соединительное «или», «не»);

3) $\vdash$ предикат логического следования;

4) скобки и запятые — ограничители высказываний и некоторого рода правила однозначности их прочтения.

$D1$. Высказывания:

1) элементарные высказывания суть высказывания;

2) если X есть высказывание, то $\sim X$ есть высказывание;

3) если X^1, ..., X^n $(n \geqslant 2)$ суть высказывания, то $(X^1 \cdot X^2 \cdot \ldots \cdot X^n)$ и $(X^1 \vee X^2 \vee \ldots \vee X^n)$ суть высказывания;

4) нечто есть высказывание лишь в силу 1—3.

$D2$. $([X], [Y]) \leftarrow (\vdash)$ есть высказывание о логическом следовании, если и только если X и Y суть высказывания.

Поскольку согласно $D1$ строение элементарных высказываний не рассматривается в общей теории логического следования, то в правилах логического следования знак $\vdash$ может встретиться здесь лишь один раз, что и фиксирует $D2$.

Примем следующие упрощения записи:

1) оператор $\cdot$ будем опускать, записывая соединяемые им высказывания рядом без интервала;

2) скобки в ряде случаев будем опускать, полагая, что их можно восстановить в таком порядке: сначала заключаются в скобки все высказывания, соединенные операторами $\cdot$, а затем — все, соединенные операторами $\vee$;

3) вместо символов вида $([X], [Y]) \leftarrow (\vdash)$ будем употреблять символы $X \vdash Y$.

Прежде чем сформулировать аксиомы, сделаем одно замечание об аксиомах вообще. Поскольку мы излагаем аксиоматическое построение общей теории логического следования, а не формальную систему, то различение аксиом и аксиомных схем здесь теряет смысл. Но во избежание недоразумений мы примем такое условие: пусть буквы X, Y, Z, X^1, X^2,... суть любые высказывания, указанные в $D1$, а различие их пусть означает лишь то, что высказывания могут быть различными. При таком условии формулируемые ниже аксиомы соответствуют аксиомным схемам формальных построений.

Аксиомы S^s:

1. $\sim\sim X \dashv\vdash X$
2. $XY \vdash X$
3. $XY \vdash YX$
4. $X^1X^2\ldots X^n \dashv\vdash Y$,

где Y отличается от $X^1X^2\ldots X^n$ лишь какой-то расстановкой скобок.

5. $\sim(XY) \dashv\vdash \sim X \vee \sim Y$

$\sim(X^1X^2\ldots X^n) \dashv\vdash \sim X^1 \vee \sim X^2 \vee \ldots \vee \sim X^n$

6. $(X \vee Y)Z \vdash XZ \vee Y$
7. $XZ \vee YZ \vdash (X \vee Y)Z$
8. $XY \vee Z \vdash (XY \vee Z)(Y \vee \sim Y)$

Правила вывода теорем из аксиом S^s:

1) Если $X \vdash Y$ и $Y \vdash Z$, то $X \vdash Z$.

2) Если $X \vdash Y$ и $X \vdash Z$, то $X \vdash YZ$.

3) Если $X^1 \dashv\vdash X^2$, то $Y^1 \vdash Y^2$, где Y^2 образуется из Y^1 путем замены какого-либо вхождения высказывания X^1 в Y^1 высказыванием X^2.

*D*3. Утверждение $X \vdash Y$ будем называть доказуемым в S^s, если и только если оно есть одна из аксиом или получается из доказуемых утверждений по правилам вывода.

*D*4. Будем рассматривать $X \supset Y$ как сокращение для $\sim X \vee Y$.

*T*1. Если $X \vdash Y$ доказуемо, то $X \supset Y$ есть тавтология.

*T*2. Если X истинно, то $X \vdash Y$ и $X \vdash \sim Y$ не могут быть оба доказуемы.

*T*3. Если доказуемо $X \vdash \sim YY$, то истинно $\sim X$.

Теоремы *T*2 и *T*3 суть теоремы непротиворечивости S^s, согласно которым использование правил сильного логического следования не может привести к противоречиям, если непротиворечивы посылки.

*T*4. Если доказуемо $X \vdash Y$, то в Y не входят элементарные высказывания, не входящие в X (теорема непарадоксальности).

*T*5. Если $X \supset Y$ есть тавтология и в Y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в X, то $X \vdash Y$ доказуемо в S^s (теорема полноты).

Согласно $T4$ в S^s недоказуемы утверждения

$$X \vdash X \vee Y, \quad X \vdash Y \supset X, \quad X \vdash \sim X \supset Y,$$
$$X \vdash Y \vee \sim Y, \quad \sim XX \vdash Y,$$

порождающие парадоксы, подобные парадоксам материальной и строгой импликации.

Однако в S^s доказуемы утверждения вида (α)

$$X \vdash \sim X \vee X, \quad \sim XX \vdash X, \quad X \sim YY \vdash \sim X,$$

рассматриваемые как частный случай парадоксальных утверждений вида

$$Y \vdash X \vee \sim X, \quad \sim XX \vdash Y, \quad X \sim YY \vdash Z.$$

Утверждения типа (α) суть законная плата за дедуктивный метод и за полноту охвата утверждений того или иного вида в данной системе. И вопрос об их судьбе должен решаться в зависимости от иных соображений, выходящих за рамки предлагаемой теории.

Система S^s (согласно $T5$) дает исчерпывающее определение класса случаев, когда из одних высказываний, определенных в $D1$, логически сильно следуют другие высказывания.

Другие логические операторы можно ввести посредством сокращающих определений (вроде $D4$) или дополнительных аксиом вида

$$X \supset Y \dashv\vdash \sim X \vee Y$$
$$X^1 : X^2 : \ldots : X^n \dashv\vdash X^1 \sim X^2 \ldots \sim X^n \vee X^2 \sim X^1 \ldots \sim X^n \vee$$
$$\vee \ldots \vee X^n \sim X^1 \ldots \sim X^{n-1}$$

§ 13. Другие системы общей теории логического следования

Теория ослабленного логического следования S^w получается путем присоединения аксиомы

$$9. \ \sim X \vdash \sim (XY)$$

и такого ограничения первого правила вывода: в X, Y и Z должно входить по крайней мере одно одинаковое элементарное высказывание.

Система S^w непротиворечива в том же смысле, что и S^s. Она непарадоксальна в смысле такой теоремы:

*T*1. Если $X \vdash Y$ доказуемо в S^w, то в X и Y входит хотя бы одно одинаковое элементарное высказывание.

Согласно *T*1, в S^w не получаются парадоксы, подобные парадоксам материальной и строгой импликации.

Система S^w полна в таком смысле:

*T*2. Если $X \supset Y$ есть тавтология и в X и Y входит хотя бы одно одинаковое элементарное высказывание, то $X \vdash Y$ доказуемо в S^w.

Согласно *T*2, система S^w дает исчерпывающее определение класса случаев, когда из одних высказываний, указанных в *D*1, логически ослабленно следуют другие. Если в системах сильной импликации только один главный знак импликации рассматривать как знак логического следования, а остальные — как материальную импликацию, то эти системы будут системами ослабленного логического следования в нашем смысле. Но они не дают полного определения класса правил логического следования такого типа.

Если в системе S^w снять ограничение на первое правило вывода, получится система S^q квазиследования, обладающая следующим свойством:

*T*3. $X \vdash Y$ доказуемо в S^q, если и только если $X \supset Y$ есть тавтология.

Таким образом, теория квазиследования совпадает с классической общей теорией логического следования.

Из сказанного очевидно, что возможны различные теории логического следования, отвечающие различным априорным требованиям к логическому следованию, и в каждом случае правила логического следования могут быть определены исчерпывающим образом. Но только одна удовлетворяет не только требованию «Истинные заключения из истинных посылок», но и требованию «Заключения конструируются только из материала (из терминов и высказываний), входящего в посылки». Это — система S^s.

§ 14. Вырожденное следование

Правила логики не ограничиваются правилами логического следования. Сюда относятся также утверждения, которые принимаются в качестве истинных в логике или истинность которых вытекает из принятых в логике предпосылок, — логически истинные утверждения. Таковы, в частности, утверждения, получающиеся из интерпретации тавтологий пропозициональной логики (алгебры) и соответствующих доказуемых формул пропозиционального исчисления как сложных высказываний. Мы будем рассматривать их как правила вырожденного следования, т. е. как правила, позволяющие принимать некоторые высказывания независимо от каких бы то ни было посылок (как следование из пустого множества посылок).

Система S^d, охватывающая вырожденное логическое следование, получается благодаря таким дополнениям к S^s.

*D*1. $\vdash X$ есть утверждение о логической истинности X, если и только если X есть высказывание.

Дополнительная аксиома (закон противоречия):

$$13.\ \vdash \sim(\sim XX)$$

Дополнительное правило вывода::

4. Если $X \vdash Y$ и $\vdash X$, то $\vdash Y$.

*D*2. $\vdash X$ доказуемо в S^d, если и только если $\vdash X$ есть аксиома 13 или получается из доказуемых утверждений по правилу 4.

*T*1. $\vdash X$ доказуемо в S^d, если и только если X есть двузначная тавтология.

Таким образом, S^d дает определение класса двузначных тавтологий, образованных из высказываний с операторами $\cdot$, $\vee$ и $\sim$. И в этом смысле она эквивалентна классическому исчислению высказываний.

*T*2. В S^d доказуемо $\vdash X \vee \sim X$ (закон исключенного третьего).

§ 15. Теория предикации

Теория предикации S^p получается благодаря таким допущениям к общей теории логического следования.

Алфавит:

1) $\urcorner$ — внутреннее отрицание;
2) ? — оператор неопределенности;
3) s, s^1, s^2,... — термины объектов (субъекты);
4) P, P^1, P^2,... — термины признаков (предикаты).

*D*1. Если $a^1, \ldots, a^n$ ($n \geqslant 1$) суть субъекты, то $(a^1, \ldots, a^n)$ есть энарный субъект.

*D*2. Если a есть энарный субъект, а P — энарный предикат, то $P(a)$ есть элементарное высказывание.

$D3$. К определению высказывания добавляется следующее: если X есть элементарное высказывание, то $\neg X$ и $?\,X$ суть высказывания.

Буквы p, q, r,... из алфавита можно исключить. Мы ввели различные символы для внешнего и внутреннего отрицаний исключительно для удобства записи.

Дополнительные аксиомы:

$$1.\ \sim P(a) \dashv\vdash \neg P(a) \vee ?\,P(a)$$

$$2.\ \sim \neg P(a) \dashv\vdash P(a) \vee ?\,P(a)$$

$$3.\ \sim ?\,P(a) \dashv\vdash P(a) \vee \neg P(a)$$

Классический случай получается из S^P, если принять еще аксиому

$$4.\ \sim P(a) \vdash \neg P(a)$$

Тогда в качестве следствия получим, что неопределенность исключается, т. е.

$$\vdash \sim ?\,P(a)$$

Но если нам с самого начала требуется система для классического случая, т. е. не нужно различать отрицания и вводить неопределенность, то S^P вообще излишня.

$T1$. Если $X \vdash Y$ доказуемо в S^P, то $X \supset Y$ есть тавтология. Аналогично если $\vdash X$ доказуемо в S^P, то X есть тавтология.

Утверждения

$$\sim \neg P(a) \supset P(a), \quad P(a) \vee \neg P(a)$$

тавтологиями не являются, поскольку $P(a)$ и $\neg P(a)$ могут оба быть неистинными.

Отсюда получаем (согласно $T1$), что:

$T2$. Утверждения

$$\sim \neg P(a) \vdash P(a), \quad \vdash P(a) \vee \neg P(a)$$

недоказуемы в S^P, и в общем (неклассическом) случае законами логики не являются.

$T3$. Но утверждение

$$P(a) \vdash \sim \neg P(a)$$

в S^P доказуемо.

Мы выше употребляли и будем употреблять в дальнейшем выражения «классический случай» и «неклассический случай». Их не надо смешивать с выражениями «классическое исчисление предикатов» и «неклассическое исчисление предикатов». Неклассический случай в теории следования у нас отличается от классического тем, что в нем учитывается внутреннее отрицание и неопределенность. Мы не вводили здесь другую терминологию потому, что наше словоупотребление точно так же связано с критикой классической логики и с возникновением неклассической логики.

§ 16. Классическая теория логического следования для высказываний с кванторами

Классическая теория логического следования для высказываний с кванторами получается путем такой же интерпретации классического исчисления предикатов, какая рассмотрена в § 1. Классическое исчисление предикатов получается путем присоединения к классическому исчислению высказываний дополнительных аксиом (аксиомных схем) и правил вывода, связанных с кванторами $\forall$ («все») и $\exists$ («некоторые»).

Классическое исчисление предикатов, если его интерпретировать как теорию логического следования для высказываний с кванторами, оказывается парадоксальным. В нем доказуемы формулы вида

$$(\forall a)\, P(a) \supset P(b), \quad P(b) \supset (\exists a)\, P(a)$$

и другие формулы, в которых в антецеденте содержатся переменные, отсутствующие в консеквенте. Если такого рода формулы рассматривать как правила логического следования, то получим утверждения, явно не соответствующие интуиции. Согласно таким правилам, мы должны признать законными такие, например, умозаключения: «Все металлы электропроводны, значит фарфор электропроводен», «Число четыре делится на два, значит некоторые нечетные числа делятся на два».

Чтобы избежать таких курьезов, при использовании классического исчисления предикатов как теории вывода принимают допущение: области значения (в нашей терминологии — предметные области) всех индивидных переменных совпадают. Если формулам классического исчисления предикатов придать вид правил логического следования, то приведенное допущение будет означать, что области значения субъектов, входящих в одно утверждение, совпадают. В наших примерах: если на место a ставится слово «металл», то и на место b должен быть вписан термин, обозначающий металл; если на место a вписали термин, обозначающий нечетное число, то и на место b должен быть вписан термин, обозначающий нечетное число.

Допущение, о котором идет речь, лежит в основе определения общезначимости, выполнимости и невыполнимости формул классического исчисления предикатов. Стоит допустить, что области значения различных индивидных переменных могут не совпадать, как многие формулы $X \supset Y$, доказуемые в классическом исчислении предикатов, окажутся не общезначимыми (не всегда истинными), если в Y входят переменные, отсутствующие в X. Таковы, например, приведенные выше формулы.

Таким образом, классическое исчисление предикатов, будучи интерпретировано как теория логического следования, определяет класс правил логического следования для частного случая, когда области значения терминов совпадают. Мы не исключаем такой фрагмент из теории логического следования. Но мы полагаем, что теория логического следования для высказываний с кванторами должна быть построена сначала без ограничений на отношения множеств значений терминов (на формальном языке — без ограничений на отношения множеств значений переменных).

Классическое исчисление предикатов является дедуктивно полным (т. е. в нем доказуемы все общезначимые формулы) при том условии, что общезначимость определяется в зависимости от рассмотренного допущения о совпадении областей значения всех индивидных переменных, входящих в одну и ту же формулу. Если же допустить, что области значения индивидных переменных могут не совпадать, и учесть это в определении общезначимости формул, то исчисление предикатов, которое дедуктивно полно относительно класса общезначимых формул и все доказуемые формулы которого общезначимы в этом новом смысле, будет уже классического.

Считается, что правила оперирования с кванторами предполагают непустоту терминов, связываемых кванторами. Это — один из предрассудков современной логики. Для того чтобы осуществлять выводы из высказываний, совершенно не требуется знать, пусты или нет фигурирующие в них термины. Так, правило $(\forall a)\, X \vdash X$ имеет силу независимо от того, пуст класс a или нет, и вообще независимо от того, входит a в X или нет. Оно есть часть определения квантора $\forall$. Квантор $\forall$ вводится в употребление таким, что $(\forall a)\ X \vdash X$. Аналогично правило $X \vdash (\exists a)\ X$ есть либо часть определения $\exists$, либо следствие такого определения.

§ 17. Теория кванторов

Теория кванторов для классического случая получается благодаря таким дополнениям к общей теории логического следования.

Принимаются все дополнения, указанные в системе S^P.

Дополнение к алфавиту:

1) $\forall$ — квантор «все»;
2) $\exists$ — квантор «некоторые».

$D1$. Дополнение к определению высказывания: если X есть высказывание, а a — термин, то $(\forall a)\ X$ и $(\exists a)\ X$ суть высказывания.

Дополнительные аксиомы:

1. $(\forall a) X \vdash X$
2. $X \vdash (\exists a) X$
3. $(\forall a) X \dashv\vdash \sim (\exists a) \sim X$
4. $(\forall a) X (\exists a) Y \vdash (\exists a) (XY)$
5. $(\forall a) (X \vee Y) \vdash (\forall a) X \vee (\exists a) Y$
6. $(\exists a) X \vdash (\forall a) X$,

где a не входит свободно в X или $\vdash X$ доказуемо.

Дополнительные правила вывода:

1. Если $X \vdash Y$, то $(\forall a)\ X \vdash (\forall a)\ Y$.
2. Если $X \vdash Y$, то $(\exists a)\ X \vdash (\exists a)\ Y$.

В зависимости от того, к какой системе общей теории логического следования делаются указанные дополнения, получаются различные системы теории кванторов. Для классического случая обозначим эти системы так: S^s_c — сильная теория кванторов, S^w_c — ослабленная теория кванторов, S^q_c — теория квазиследования и т. д. Систему, основанную на S^q и включающую S^d, обозначим S°.

Классическая теория кванторов обладает следующим свойством:

$T1$. Если $X \supset Y$ есть тавтология, и в Y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в X, то $X \vdash Y$ доказуема в сильной теории логического следования. Аналогичные теоремы полноты имеют силу для других систем (с соответствующими ограничениями).

Для теории квазиследования будет иметь силу утверждение:

*T*2. Если $X \supset Y$ есть тавтология, то $X \vdash Y$ доказуемо.

Она не будет совпадать с теорией логического следования, получающейся благодаря соответствующей интерпретации классического исчисления предикатов, ибо (в частности) утверждения вида $(\forall a)\,P(a) \supset P(b)$ и $P(b) \supset (\exists a)\,P(a)$ не являются тавтологиями.

Теория кванторов для неклассического случая получается благодаря следующим модификациям теории для классического случая.

*D*2. Дополнение к определению высказывания: если X есть высказывание, а a — термин, то $(\neg\forall a)\,X$, $(\neg\exists a)\,X$, $(?\forall a)\,X$ и $(?\exists a)\,X$ суть высказывания.

Аксиомы 3 заменяются такими:

$$3^1.\ (\forall a)X \dashv\vdash (\neg\exists a) \sim X$$

$$3^2.\ (\neg\forall a)\,X \dashv\vdash (\exists a) \sim X$$

$$3^3.\ (?\forall a)\,X \dashv\vdash (?\exists a) \sim X$$

Принимаются дополнительные аксиомы:

$$7.\ (\exists a)(X \vee Y) \dashv\vdash (\exists a)\,X \vee (\exists a)\,Y$$

$$8.\ (\forall a)\,X \vee (\forall a)\,Y \vdash (\forall a)(X \vee Y)$$

$$9.\ \sim(\forall a)\,X \dashv\vdash (\neg\forall a)\,X \vee (?\forall a)\,X$$

$$10.\ \sim(\neg\forall a)\,X \dashv\vdash (\forall a)\,X \vee (?\forall a)\,X$$

$$11.\ \sim(?\forall a)\,X \dashv\vdash (\forall a)\,X \vee (\neg\forall a)\,X$$

*T*2. Если $X \vdash Y$ доказуемо (в любой системе теории кванторов), то $X \supset Y$ есть тавтология. Аналогично если $\vdash X$ доказуемо, то X есть тавтология.

Из *T*1 следует непротиворечивость теории кванторов (если X истинно, и из X следует Y, то из X не следует $\sim Y$; если из X следует Y и $\sim Y$, то X неистинно).

Из *T*1, далее, следует, что утверждения

$$\sim(\neg\forall a)\,X \vdash (\forall a)\,X, \quad \sim(\neg\exists a)\,X \vdash (\exists a)\,X$$

$$\vdash \sim(\neg\forall a)\,X \supset (\forall a)\,X, \quad \vdash \sim(\neg\exists a)\,X \supset (\exists a)\,X$$

$$\vdash (\forall a)\,X \vee (\neg\forall a)\,X, \quad \vdash (\exists a)\,X \vee (\neg\exists a)\,X$$

недоказуемы в нашей теории кванторов, поскольку утверждения

$$\sim(\neg\forall a)\,X \supset (\forall a)\,X, \quad \sim(\neg\exists a)\,X \supset (\exists a)\,X$$

$$(\forall a)\,X \vee (\neg\forall a)\,X, \quad (\exists a)\,X \vee (\neg\exists a)\,X$$

не являются тавтологиями. Точно так же недоказуемы утверждения

$$(\forall a)\, P(a) \vdash P(b), \quad P(b) \vdash (\exists a)\, P(a)$$

$$\vdash (\forall a)\, P(a) \supset P(b), \quad \vdash P(b) \supset (\exists a)\, P(a),$$

поскольку утверждения

$$(\forall a)\, P(a) \supset P(b), \quad P(b) \supset (\exists a)\, P(a)$$

не являются тавтологиями.

*Т*3. Если $X \vdash Y$ доказуема в теории сильного следования, то в Y не входят элементарные высказывания, отсутствующие в X, и в Y не входят термины, отсутствующие в X. Аналогичные теоремы имеют место для теории ослабленного и других форм следования.

Приведенные выше утверждения $(\forall a)\, P(a) \vdash P(b)$ и $P(b) \vdash (\exists a)\, P(a)$ недоказуемы в нашей теории также и в силу *Т*3 (за исключением теории квазиследования, где они недоказуемы в силу *Т*2).

Благодаря теореме *Т*1 и теореме *Т*2 имеется разрешающая процедура, посредством которой для любого данного утверждения $X \vdash Y$ можно установить, доказуемо оно в системах нашей теории кванторов или нет: надо убедиться в том, что $X \supset Y$ есть или не есть тавтология; если оно не есть тавтология, то $X \vdash Y$ недоказуемо в наших системах; если оно есть тавтология, то надо установить отношение единиц смысла в X и Y; если оно удовлетворяет известному ограничению, то $X \vdash Y$ доказуемо в системе с таким ограничением; если не удовлетворяет, то $X \vdash Y$ недоказуемо в этой системе. Разрешимость систем нашей теории кванторов отвечает идее: в рамках логики неразрешимых теорий в идеале не должно быть, поскольку логика должна стремиться к тому, чтобы в науке не было проблем, неразрешимых по вине логики.

Для классического исчисления предикатов, как известно, процедура разрешимости отсутствует. Чтобы проанализировать причину этого обстоятельства, построим систему S^k, эквивалентную классическому исчислению предикатов, следующим образом. Ограничимся исчислением предикатов первой ступени. Поэтому возьмем систему S°, исключим квантификацию предикатов и добавим аксиомы

12. $(\forall a)\, X \vdash Y$
13. $Y \vdash (\exists a)\, X$,

где Y получается из X путем замены всех свободных вхождений a в X на b, причем в X нет вхождений вида $(\forall b)\ Z$ и $(\exists b)\ Z$ таких, что a свободно входит в Z.

*T*4. Если $X \vdash Y$ доказуема в S^k, то $X \supset Y$ доказуема в классическом исчислении предикатов, и наоборот. Если $\vdash X$ доказуема в S^k, то X доказуема в классическом исчислении предикатов, и наоборот.

Как сами только что приведенные аксиомы, так и некоторые получаемые с их помощью теоремы не являются тавтологиями в нашем понимании. Например, таковы теоремы

$$(\forall a)(P(a) \vee P(b)) \vdash (\exists a)\, P(a)$$
$$(\forall a)(P(a) \vee P(b)) \vdash P(b)$$
$$(\forall a)\, P(a) \vdash (\forall b)\, P(b)$$
$$(\exists a)\, P(a) \vdash (\exists b)\, P(b)$$

Аксиомы 12 и 13 позволяют заменять субъект a субъектом b (в терминах исчисления предикатов — индивидную переменную a любой индивидной переменной b), что допустимо лишь при условии совпадения областей их значения. А это допущение является внелогическим.

§ 18. Условные высказывания

Система S^{if}, определяющая оператор условности, получается благодаря таким дополнениям к общей теории логического следования.

Дополнение к алфавиту: $\rightarrow$ — оператор условности.

Дополнение к определению высказывания: если X и Y суть высказывания, то $X \rightarrow Y$, $X \urcorner \rightarrow Y$ и $X? \rightarrow Y$ суть высказывания.

Дополнительные аксиомы:

1. $(X \rightarrow Y)\, X \vdash Y$
2. $(X \rightarrow Y) \vdash (\sim Y \rightarrow \sim X)$
3. $(X \rightarrow Y)(Y \rightarrow Z) \vdash (X \rightarrow Z)$
4. $(X \rightarrow YZ) \vdash (X \rightarrow Y)(X \rightarrow Z)$
5. $(X \rightarrow Y)(Z \rightarrow V) \vdash (XZ \rightarrow YV)$
6. $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \vdash (XY \rightarrow Z)$
7. $(XY \rightarrow Z) \sim (X \rightarrow Z) \vdash (X \rightarrow (Y \rightarrow Z))$
8. $\sim (X \rightarrow Y) \dashv\vdash (X \urcorner \rightarrow Y) \vee (X? \rightarrow Y)$
9. $\sim (X \urcorner \rightarrow Y) \dashv\vdash (X \rightarrow Y) \vee (X? \rightarrow Y)$
10. $\sim (X? \rightarrow Y) \dashv\vdash (X \rightarrow Y) \vee (X \urcorner \rightarrow Y)$

Дополнительное правило вывода:

1. Если $X \vdash Y$, то $\vdash (X \rightarrow Y)$.

Класс доказуемых утверждений вида $\vdash (X \rightarrow Y)$ всецело зависит от класса доказуемых утверждений вида $X \vdash Y$. Дополнительные аксиомы, как видим, удовлетворяют свойству непарадоксальности сильного логического следования. Соответствующие им утверждения вида $X \supset Y$ суть тавтологии.

Классический случай получается, если исключить аксиомы 8—10 или, наоборот, добавить аксиомы

$$\sim(X \urcorner \rightarrow Y) \vdash (X \rightarrow Y), \quad \vdash \sim(X? \rightarrow Y).$$

Если в аксиоме 7 исключить в посылке $\sim (X \rightarrow Z)$, то оказываются доказуемыми утверждения вида

$$\vdash X \rightarrow (Y \vee \sim Y), \quad \vdash \sim YY \rightarrow X$$
$$\vdash (X \rightarrow (Y \rightarrow X)), \quad \vdash (X \rightarrow (\sim X \rightarrow Y)),$$

аналогичные парадоксам материальной и строгой импликации. И в общем будет иметь силу теорема : $\vdash (X \rightarrow Y)$ доказуема, если и только если $X \supset Y$ есть тавтология.

Независимо от того, как мы отнесемся к такого рода следствиям, они не означают парадоксальности системы правил логического следования. Кроме того, совпадение класса доказуемых $\vdash (X \rightarrow Y)$ и тавтологий $X \supset Y$ не означает, что класс истинных $X \rightarrow Y$ совпадет с классом истинных $X \supset Y$: из того, что $X \supset Y$ истинно, не следует, что будет истинно $X \rightarrow Y$. Так что аксиому 7 можно было бы принять и в неограниченном виде $(XY \rightarrow Z) \vdash (X \rightarrow (Y \rightarrow Z))$.

§ 19. Теория терминов

Теория логического следования определяет не только свойства высказываниеобразующих операторов, но и свойства терминообразующих операторов. Система S^t теории терминов получается благодаря таким дополнениям к рассмотренным выше системам.

Алфавит:

1) $\downarrow$ — терминообразующий оператор;

2) $\rightharpoonup$ — двухместный предикат «включается по значению».

Для наглядности высказывание $\rightharpoonup ([a], [b])$ будем писать в форме $a \rightharpoonup b$.

$D1$. Предикат:

1) если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 1)$ суть предикаты, то $(a^1 \cdot \ldots \cdot a^n)$, $(a^1 \vee \ldots \vee a^n)$, $(\cdot / a^1, \ldots, a^n)$ и $(\vee / a^1, \ldots, a^n)$ суть предикаты;

2) если a есть предикат, то $\sim a$ и $\tilde{a}$ суть предикаты;

3) если X есть высказывание, а Q — предикат, то $Q{\downarrow}X$ есть предикат;

4) если X есть высказывание, то $X{\downarrow}$ есть предикат;

5) нечто есть предикат лишь в силу 1—4.

$D2$. Субъект:

1) если $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 1)$ суть субъекты, то $(a^1 \cdot \ldots \cdot a^n)$, $(a^1 \vee \ldots \vee a^n)$, $(\cdot / a^1, \ldots, a^n)$, $(\vee / a^1, \ldots, a^n)$, $(a^1, \ldots, a^n)$ суть субъекты;

2) если a есть субъект, то $\sim a$ есть субъект;

3) если X есть высказывание, а a есть субъект, то $a{\downarrow}X$ есть субъект;

4) если X есть высказывание, то ${\downarrow}X$ есть субъект;

5) если a есть субъект или предикат, то $[a]$ есть субъект;

6) нечто есть субъект лишь в силу 1—5.

$D3$. Субъекты и предикаты суть термины.

$D4$. В качестве сокращения для $(a \rightarrow b)(b \rightarrow a)$ будем писать $a \rightleftharpoons b$.

Аксиомы $A\mathrm{I}$:

1. $\vdash \sim \sim a \rightleftharpoons a$
2. $\vdash a \rightarrow ab$
3. $\vdash ab \rightarrow ba$
4. $\vdash abc \rightleftharpoons a(bc)$
5. $\vdash \sim (ab) \rightleftharpoons \sim a \vee \sim b$
6. $(a \rightarrow b) \vdash (\sim b \rightarrow \sim a)$
7. $(a \rightarrow b)(b \rightarrow c) \vdash (a \rightarrow c)$
8. $(a \rightarrow c)(b \rightarrow c) \vdash (ab \rightarrow c)$
9. $\vdash (a \vee \sim a) \rightarrow b$
10. $(a \rightarrow b) \vdash \sim (\sim a \rightarrow b)$

Аксиомы $A\mathrm{II}$:

1. $(PQ)(a) \vdash P(a)Q(a)$
2. $P(ab) \vdash P(a)P(b)$
3. $\neg P(a) \vee \neg Q(a) \vdash \neg (PQ)(a)$
4. $\neg P(a) \vee \neg P(b) \vdash \neg P(ab)$
5. $(P \vee Q)(a) \dashv\vdash P(a) \vee Q(a)$
6. $P(a \vee b) \dashv\vdash P(a) \vee P(b)$

7. $\neg(P \vee Q)(a) \dashv\vdash \neg P(a) \neg Q(a)$
8. $\neg P(a \vee b) \dashv\vdash \neg P(a) \neg P(b)$
9. $\alpha(\cdot/P, Q)(a) \dashv\vdash \alpha P(a) \alpha Q(a)$
10. $\alpha P(\cdot/a, b) \dashv\vdash \alpha P(a) \alpha P(b)$
11. $\alpha(\vee/P, Q)(a) \dashv\vdash \alpha P(a) \vee \alpha Q(a)$
12. $\alpha P(\vee/a, b) \dashv\vdash \alpha P(a) \vee \alpha P(b)$
13. $\sim P(a) \dashv\vdash \tilde{P}(a)$

Мы не будем здесь излагать теорию терминов в полном виде. Ограничимся тем, что приведем еще группы разнородных аксиом как пример различных направлений, по которым можно разрабатывать теорию терминов:

1. $(\downarrow X \rightleftharpoons \downarrow Y) \dashv\vdash (X \downarrow \rightleftharpoons Y \downarrow)$
2. $(\downarrow X \rightleftharpoons \downarrow Y) \dashv\vdash (a \downarrow X \rightleftharpoons a \downarrow Y)$
3. $\vdash a \rightharpoonup a \downarrow X$
4. $\vdash (X \dashv\vdash Y) \rightarrow (\downarrow X \rightleftharpoons \downarrow Y)$
5. $\vdash (a, b, c) \rightleftharpoons (a, (b, c))$
6. $(X \equiv Y) \vdash (\downarrow X \rightleftharpoons \downarrow Y)$
7. $(a \rightharpoonup b)(\forall a) \alpha P(a) \vdash (\forall b) \alpha P(b)$
8. $(a \rightharpoonup b)(\exists b) \alpha P(b) \vdash (\exists a) \alpha P(a)$
9. $(\forall a) X (\exists b) \sim X \vdash \sim (a \rightharpoonup b)$
10. $(\alpha \forall a) \beta P(a \downarrow X) \dashv\vdash (\alpha \forall a \downarrow X) \beta P(a \downarrow X)$
11. $X(\forall a \downarrow X) Y \vdash Y$
12. $X(\forall \downarrow X) Y \vdash Y$
13. $\vdash (a \downarrow X) \downarrow Y \rightleftharpoons (a \downarrow Y) \downarrow X$

§ 20. Субъектно-предикатные термины

Сделаем несколько дополнений к тому, что говорилось о терминах. Они позволят нам указать на некоторые детали терминотворчества, играющие на наш взгляд важную роль в науке.

Из высказываний $\alpha P(s)$ и $\sim \alpha P(s)$ образуются термины по правилам, рассмотренным выше. Но читаются эти термины так, что фактически неявно употребляются сокращающие операции. Так, $s \downarrow (P(s))$ читается как «s, который имеет P», $s \downarrow (\neg P(s))$ — как «s, который не имеет P» и т. п. Эти сокращения могут быть записаны особого рода правилами:

$A1$. Если s есть субъект, а P — предикат, то $s \downarrow \alpha P$ и $s \sim \downarrow \alpha P$ суть субъекты, а $P \downarrow \alpha s$ и $P \sim \downarrow \alpha s$ суть предикаты.

Вообще говоря, научная деятельность в большой мере состоит именно в изобретении сокращений для языковых конструкций. Причем эти сокращения изобретаются как стандартные и более или менее широко действующие.

Определения предикатов осуществляются по схеме $\alpha P(s) \equiv X$, где X есть $\beta Q(s)$, конъюнкция высказываний такого рода или дизъюнкция таких конъюнкций. При этом определяются не сами по себе предикаты, а содержащие их высказывания. Это обстоятельство особенно важно иметь в виду при выяснении смысла таких терминов, как «истинно», «ложно», «существует» и т. п. Неверно ставить вопросы «Что есть истина?», «Что есть существование?» и т. п. Разумны лишь вопросы о смысле выражений «X истинно», «X ложно», «s существует» и т. п., да и то лишь при том условии, что заданы какие-то дополнительные сведения относительно X и s (структура, тип объекта и т. п.).

§ 21. Смысловые отношения терминов и высказываний

При построении теории логического следования, говорили мы, необходимо принимать во внимание смысловые отношения высказываний. Если теория логического следования уже построена, ее в свою очередь можно использовать для определения отношений терминов и высказываний, относимых к числу смысловых. Никакого круга в определениях при этом не получится по двум причинам. Во-первых, логическое следование не определяется через смысловые отношения высказываний. Последние лишь учитываются при изобретении определения логического следования как эвристическое средство, но определением его является совокупность некоторых логических систем. Последние являются в некотором роде исходными, не предполагающими с формальной точки зрения никаких иных понятий логики. Во-вторых, при изобретении теории логического следования учитываются вполне конкретные структуры высказываний, для которых принимается тождественность смысла, тогда как сейчас речь идет об определениях, не зависящих от структуры высказываний.

$D1$. Высказывание Y включается по смыслу в X (Y есть часть смысла или содержания X), если и только если доказуемо $X \vdash Y$.

$D2$. X и Y эквивалентны по смыслу, если и только если доказуемы $X \vdash Y$ и $Y \vdash X$.

Таким образом, выражение «Y содержится по смыслу в X» не есть нечто первично ясное по отношению к выражению «Из X логически следует Y», а наоборот: лишь при условии определения логического следования возможно дать точное определение включения по смыслу.

Пусть Y образуется из X путем замены термина a термином b везде, где a входит в X.

$D3$. Термины a и b дедуктивно связаны, если и только если доказуемо по крайней мере одно из $X \vdash Y$ и $Y \vdash X$.

$D4$. Термин b дедуктивно включается в термин a, если и только если доказуемо $X \vdash Y$.

$D5$. Термины a и b дедуктивно эквивалентны, если и только если доказуемы оба $X \vdash Y$ и $Y \vdash X$.

$D6$. Термин a дедуктивно сильнее термина b, если и только если доказуемо $X \vdash Y$ и недоказуемо $Y \vdash X$.

Пусть U есть совокупность (конъюнкция) высказываний данной области науки T, в которую (в U) не входят X и Y.

$D7$. Высказывание Z есть собственное следствие X в T, если и только если недоказуемо $U \vdash Z$ и доказуемо $XU \vdash Z$ (т. е. Z не следует из U и следует из XU).

$D8$. Высказывание Y дедуктивно включается в X в T, если и только если всякое собственное следствие Y в T есть собственное следствие X в T.

$D9$. Высказывания X и Y дедуктивно эквивалентны в T, если и только если каждое из них дедуктивно включается в другое в T.

$D10$. Высказывание Y дедуктивно включается в X, если и только если Y дедуктивно включается в X в любой области науки. Высказывания X и Y дедуктивно эквивалентны, если и только если они дедуктивно эквивалентны в любой области науки.

$D11$. Предикаты P и Q будем называть логически сопряженными, если и только если для них имеют силу утверждения

$$P(a) \dashv\vdash \neg Q(\sim a), \quad \neg P(a) \dashv\vdash Q(\sim a),$$
$$?P(a) \dashv\vdash ?Q(\sim a)$$

$D12$. Предикат P категорически сильнее предиката Q, если для них имеют силу утверждения

$$P(a) \vdash Q(a), \quad \neg Q(a) \vdash \neg P(a),$$
$$?Q(a) \vdash \sim P(a)$$

§ 22. Многозначная логика и теория логического следования

При обосновании тезиса неуниверсальности логики имеют в виду неуниверсальность теории логического следования (теории вывода). И при этом ссылаются на многозначную логику. Эти ссылки совершенно неправомерны прежде всего с чисто формальной точки зрения (по «техническим» соображениям). Поясним, в чем тут дело.

Действительно, можно построить многозначную логическую систему так, что некоторые тавтологии («законы») двузначной логики не будут тавтологиями в данной многозначной логике. Однако такую многозначную систему можно придумать для любой тавтологии двузначной логики. Кроме того, само выражение «такая-то тавтология двузначной логики не является тавтологией в такой-то многозначной логике» нуждается в пояснении.

Примем следующее определение:

$D1$. Пусть F^n есть функция некоторой многозначной логики. Если из ее определения исключить все значения истинности, кроме двух, соответствующих значениям двузначной логики, и при этом получится определение некоторой функции F^2 двузначной логики, то F^n будем называть многозначным аналогом для F^2, а F^2 — двузначным аналогом для F^n (функции F^n и F^2 суть аналогичные функции).

$D2$. Пропозициональная формула двузначной (многозначной) логики является аналогом (или аналогичной) пропозициональной формулы многозначной (двузначной) логики, если и только если одна из них может быть получена из другой путем замены знаков функций соответствующими знаками аналогичных функций.

Пусть L^2 есть функционально полная система двузначной пропозициональной логики, а L^n — некоторая многозначная система. Тривиально просто доказываются утверждения.

$T1$. Для любой тавтологии A^2 в L^2 может быть построена такая L^n, что A^n, аналогичная A^2, не будет тавтологией в ней.

$T2$. Если L^n функционально полна, то для каждой F^2 в ней возможны по крайней мере два различных аналога F^n_1 и F^n_2; для каждой пропозициональной формулы A^2 в L^2 возможны по крайней мере две различные аналогичные ей формулы A^n_1 и A^n_2 в L^n.

$T3$. Для любой тавтологии A^2 в L^2 в функционально полной системе L^n могут быть найдены (определены) такие аналоги входящих в A^2 функций, что аналогичная ей A^n_1 будет тавтологией в L^n, а A^n_2 — нет.

Приведем доказательство $T3$. Все тавтологии L^2 равнозначны, все функции L^2 определимы через $\vee$ и $\sim$. Поэтому достаточно взять формулу $X \vee \sim X$ и построить трехзначные аналоги для $\vee$ и $\sim$. Пусть значения истинности в двузначной логике суть 1 и 3, а в трехзначной — 1, 2 и 3. Тавтология в обоих случаях пусть принимает всегда значение 1. В двузначной логике $\vee$ и $\sim$ определяются так: 1) $X \vee Y = min(X, Y)$; 2) если $X = 1$, то $\sim X = 3$; если $X = 3$, то $\sim X = 1$. В трехзначной логике определение $\vee$ остается то же, так что трехзначная дизъюнкция явно есть аналог двузначной. Что же касается отрицания, то возможны два трехзначных его аналога. Первый аналог получается путем дополнения к определению 2 такого пункта: а) если $X = 2$, то $\sim X = 2$. Второй аналог получается путем дополнения к определению 2 такого пункта: в) если $X = 2$, то $\sim X = 1$. Теперь легко можно убедиться в том, что трехзначная $X \vee \sim X$ будет тавтологией, если трехзначное $\sim$ есть второй аналог двузначного, и не будет тавтологией, если трехзначное $\sim$ есть первый аналог двузначного. Изменим теперь определение дизъюнкции: $X \vee Y = 3$ при $X = 2$ и $Y = 2$; $X \vee Y = min(X, Y)$ в остальных случаях. Если тавтологией будем считать формулу, всегда имеющую значение 1 или 2, наше утверждение сохраняет силу. Так что $T3$ верно при любом определении тавтологии (т. е. при любом разбиении значений истинности на отмеченные и неотмеченные).

Таким образом, многозначная логика не подтверждает как тезис универсальности, так и тезис неуниверсальности логики, — она сама по себе не имеет к нему никакого отношения.

Правила логического следования не зависят от числа значений истинности высказываний в том смысле, что они являются одними и теми же для высказываний с одинаковой структурой, какими бы они ни были с точки зрения числа значений истинности (двузначными, трехзначными и т. д.). Это означает, что свойства логических операторов не зависят от числа допускаемых значений истинности высказываний. Многозначная концепция логики играет важную роль в логике. Но непосредственно заключать, что допущение многозначности высказываний ведет к тому, что изменяется теория логического следования, значит допускать грубейшую ошибку.

Обнаружение многозначности высказываний влияет на теорию логического следования косвенно: оно способствует (наряду с другими обстоятельствами) дифференциации логических операторов и введению новых. Однако, какие бы логические операторы ни вводились, их свойства в теории логического следования определяются независимо от гипотезы многозначности, которая играет здесь эвристическую роль, и не более того. Причем для «обработки» теории логического следования с любыми операторами оказывается достаточной двузначная оценка высказываний (достаточно значений «истинно» и «неистинно»).

Сказанное важно иметь в виду, когда читатель столкнется с разговорами о локальности законов логики, об их зависимости от предметной области и т. п. В частности, из сказанного следует, что не требуется никаких особых правил логического следования для квантовой механики, которые отличались бы от правил для классической физики. Более того, их вообще невозможно изобрести без риска превращения их в универсальные, т. е. имеющие силу для любой науки, в том числе и для классической физики. Точно так же ошибочно полагать, что нужна различная теория вывода для различных областей математики.

§ 23. Интуиционистская логика

В интуиционистской (конструктивистской) логике, как и в классической, доказуемы формулы

$$(\forall a)\, P(a) \supset P(b), \quad P(b) \supset (\exists a)\, P(a),$$
$$\sim XX \supset Y, \quad X \supset Y \vee \sim Y$$

и другие формулы, в которых в консеквенте фигурируют переменные, отсутствующие в антецеденте. Так что при интерпретации интуиционистской импликации в качестве знака логического следования получаются парадоксы, аналогичные парадоксам материальной и строгой импликаций.

Уже по одной этой причине интуиционистская логика не может играть роль общей теории дедукции. Возможность истолкования ее в качестве некоторого специального случая теории дедукции мы не отвергаем.

Интуиционистская логика имеет другой, более важный недостаток с точки зрения ее претензий на роль общей теории логического следования. Рассмотрим его подробнее.

Интуиционисты обратили внимание на то, что отрицание ложности утверждения не всегда есть признание его истинности (так бывает в некоторых случаях в области математики, имеющей дело с бесконечными множествами). Такой эффект получается по следующей причине. Высказывания математики суть высказывания об абстрактных объектах, и вопрос об их истинности и ложности решается в зависимости от возможности их доказательства или опровержения (а также в зависимости от возможности «построить» соответствующие объекты). Пусть высказывание считается истинным, если оно доказуемо, и ложным, если оно опровержимо (если доказуемо его отрицание). Но возможны случаи, когда высказывание нельзя доказать и нельзя опровергнуть, — когда оно неразрешимо. И в этом случае отрицание ложности высказывания не обязательно дает признание истинности: оно может означать и неразрешимость высказывания. Таким образом, рассматриваемые случаи могут быть описаны в трехзначной логике.

Исходя из указанных фактов, интуиционисты ограничили классическую логику с таким расчетом, чтобы закон исключенного третьего и правило снятия двойного отрицания не попали в число законов логики. Однако здесь произошло одно интересное смешение.

Что, собственно говоря, понимать под законом исключенного третьего? Утверждение «X или не-X» или утверждение «Либо X истинно, либо X ложно»? В классической логике, базирующейся на принципе двузначности высказываний, эти утверждения равнозначны. Но в том случае, когда высказываниям приписывают три или более значения истинности, они оказываются неравнозначными. Первое из них сохраняет силу независимо от числа допускаемых значений истинности высказываний как следствие определения отрицания и дизъюнкции или как следствие определений значений истинности для высказываний с этими операторами. Равнозначным ему является утверждение «Либо X истинно, либо не является истинным X», истинность которого точно так же не зависит от числа значений истинности, которые может принять X. Второе же утверждение оказывается неверным в случае, если число возможных значений истинности X больше двух. В рассматриваемом случае верным будет утверждение «Либо X истинно, либо X ложно, либо X не истинно и не ложно (а, скажем, неопределенно)».

Интуиционисты (в логике) указанное различение не произвели и исключили из числа законов логики не только второе утверждение, но и ни в чем не повинное первое.

Аналогично получилось с законом снятия двойного отрицания. Утверждение «Если не-не-X, то X» сохраняет силу в любом случае, что видно хотя бы уже из того, что всегда сохраняет силу его семантический эквивалент «Если неверно, что X не является истинным, то X истинно». Утверждение же «Если неверно, что X ложно, то X истинно» ошибочно в случае, если число допускаемых значений истинности X больше двух.

Интуиционисты, обнаружив ошибочность второго утверждения для случаев трехзначности высказываний, исключили из числа правил логики и первое утверждение. Одним словом, обнаружив неклассическую ситуацию (поясним ниже в общем виде), они осмыслили ее в рамках классических представлений.

Таким образом, идея ограничить закон исключенного третьего (и правило двойного отрицания) возникла на основе рассмотрения внутренней структуры высказываний (субъекты, предикаты, кванторы), не учитываемой на уровне пропозициональной логики. Однако интуиционисты не ввели логических знаков (знак неопределенности, два вида отрицания), которые позволили бы получить эти ограничения естественным образом, не затрагивая ни в чем не повинную пропозициональную логику. Поэтому они вынуждены были ввести упомянутые ограничения уже на уровне пропозициональной логики, как некую априорную предпосылку.

Но интуиционистское ограничение пропозициональной логики бессмысленно, ибо пропозициональная логика должна дать исчерпывающее определение логических знаков «и», «не», «или» и т. п., а упомянутое ограничение означает при этом лишь то, что определение этих знаков оказывается частичным, неполным. В результате в интуиционистской логике оказывается недоказуемым некоторый класс формул, которые не вызывают никаких сомнений с точки зрения интерпретации их как правил логического следования.

Таким образом, при интерпретации интуиционистской логики как теории логического следования получается искаженная (неправильная, «смещенная») система: в ней принимаются интуитивно парадоксальные правила и отвергаются интуитивно несомненные правила логического следования.

В нашей концепции нет надобности формулировать интуиционистскую логику как особую систему теории логического следования. Интуиционистские идеи реализуются здесь как естественное следствие различения отрицания.

В наших системах неклассической теории кванторов недоказуемы формулы

$$\sim(\neg\forall a)X \vdash (\forall a)X, \quad \sim(\neg\exists a)X \vdash (\exists a)X,$$
$$\sim\neg P(a) \vdash P(a)$$
$$\vdash\ \sim(\neg\forall a)X \supset (\forall a)X, \quad \vdash\ \sim(\neg\exists a)X \supset (\exists a)X,$$
$$\vdash\ \sim\neg P(a) \supset P(a)$$
$$\vdash (\forall a)X \vee (\neg\forall a)X, \quad \vdash (\exists a)X \vee (\neg\exists a)X,$$
$$\vdash P(a) \vee \neg P(a)$$

§ 24. Дедуктивные средства науки

Дедуктивные средства науки (т. е. способы получения одних высказываний из других) не ограничиваются теми правилами, которые устанавливаются в теории логического следования. К ним относятся логические правила, которые нельзя считать определениями свойств логических операторов и следствиями из этих определений. Их мы частично рассмотрим ниже. К ним относятся также правила математики и правила, изобретаемые в ряде других конкретных наук (например, в физике). Причем доля правил логического следования в дедуктивных средствах науки сравнительно невелика (во всяком случае значительно меньше, чем принято думать).

§ 25. Выводимость

Высказывание B выводится (дедуцируется) из высказываний $A^1, \ldots, A^n$ по правилам логического следования, если и только если в теории логического следования доказуемо

$$A^1 \cdot \ldots \cdot A^n \vdash B,$$

т. е. имеется соответствующее правило. Аналогично для любых других правил дедукции.

Глава пятая

ЛОГИЧЕСКИЕ ТЕРМИНЫ В ЯЗЫКЕ НАУКИ

Термины, значение которых определяется в логике, суть логические термины. Выше мы уже имели дело с примерами таких терминов: это — логические предикаты «логически следует», «включается по значению», «тождественно по смыслу», «истинно» и т. п. Особенность рассмотренных логических терминов состоит в том, что с их помощью получаются высказывания о терминах, высказываниях и логических операторах. Назовем их семалогическими.

Но в логике рассматриваются также термины, которые в конкретных науках употребляются совместно с их терминологией и с помощью которых строятся высказывания о предметах, изучаемых этими науками. Назовем их синталогическими. К их числу относятся такие термины, как «существует», «возможно», «класс», «структура» и т. п.

§ 1. Предикаты существования

Определение существования и несуществования предметов, пригодное для всех наук и всех случаев познания, невозможно. Фактически в разных науках и даже в разных разделах одной науки встречаются разные понимания существования и несуществования. Чаще вместо точных определений имеют место неявные и далеко не ясные соглашения на этот счет. Обычно существование и несуществование понимается как возможность или невозможность обнаружить предметы с помощью органов чувств и приборов, по их следам и последствиям и т. п., а также как возможность или невозможность создать предметы такого рода. В некоторых случаях существование или несуществование одних предметов явно или неявно постулируется, а вопрос о существовании или несуществовании других решается путем вывода из этих предпосылок.

Мы принимаем следующие допущения. В каждой области науки вопрос о существовании предметов решается по крайней мере одним из следующих способов. Первый способ — принимаются утверждения или определения (или и то и другое) относительно существования одних предметов, и из этих определений и утверждений по правилам логики получаются следствия для других предметов. Второй способ — устанавливается по крайней мере один способ выбора по крайней мере некоторых из изучаемых предметов, который отличен от выбора этих предметов путем употребления обозначающих их знаков и которому приписывается то свойство, что если выбор предмета этим способом возможен (невозможен), то он считается существующим (несуществующим). Назовем такой выбор экзистенциальным. Относительно таких экзистенциальных выборов и определяются выражения «существует» и «не существует» и строятся высказывания с ними. Устанавливается, далее, перечень правил, позволяющих судить о существовании или несуществовании других (по крайней мере некоторых) предметов на основе сведений, указанных выше.

Например, возьмем выражение «Тройка целых чисел x, y и z таких, что $x^2 + y^2 = z^2$» и «Тройка целых чисел x, y и z таких, что $x^3 + y^3 = z^3$». Употребление этих выражений есть выбор соответствующих трех чисел. Но имеется другой способ выбора — записать числа знаками натуральных чисел или указать способ, посредством которого это можно сделать в конечное число шагов. Относительно этого второго способа выбора тройка чисел, обозначаемая первым выражением, существует, а обозначаемая вторым — нет. О существовании Петра I, далее, речь может идти не в том смысле, что он живет в данное время, а в историческом смысле. И показателем этого существования (экзистенциальный выбор) являются письменные и другие материальные свидетельства. Существование натуральных чисел постулируется. О существовании микрочастиц судят по их воздействиям на приборы и т. д.

Если исследователь о существовании предметов судит на основе экзистенциального выбора, то в нем срабатывает такой механизм. В его отражающем устройстве на табло имеется специальная секция экзистенциального выбора. И если в ней загорелась комбинация лампочек, соответствующая предмету П, то исследователь считает этот предмет существующим. Если же исследователь не может такую комбинацию лампочек зажечь, то он считает, что П не существует (в данной ситуации или вообще). Причем наш исследователь при этом совершенно исправен, и если уж он не может зажечь упомянутые лампочки, то не по своей вине, а исключительно по вине самого предмета.

При таких допущениях на долю логики, как видим, остается определение свойств предиката «существует» и некоторых логических границ, за которые исследователи в своих суждениях о существовании предметов не могут выйти без риска совершить ошибку.

Надо различать высказывания с квантором «некоторые» (с квантором существования) и высказывания с предикатом «существует». Выражение $\exists a$ («Некоторые a») не есть высказывание, тогда как выражение Ea («a существует») есть полноценное высказывание. Кроме того, встречаются высказывания вида «Некоторые a не существуют», «Неверно, что некоторые a существуют» и т. п.

§ 2. Предикат универсальности

Через предикат существования определяются предикаты универсальности U^t, U^s и U следующим образом.

$D1$. $U^t(a)$, если и только если $E(a)$ в любое время (всегда).

$D2$. $U^s(a)$, если и только если $E(a)$ в любом месте (везде).

$$D3. \quad U(a) \equiv \neg E(\sim a)$$
$$\neg U(a) \equiv E(\sim a)$$
$$?U(a) \equiv ?E(\sim a)$$

В классическом случае $D3$ имеет вид

$$U(a) \equiv \sim E(\sim a)$$

§ 3. Значения истинности экзистенциальных высказываний

Для высказываний с предикатами существования определения значений истинности несколько отличны от определений для высказываний $sa \leftarrow P$, где P не есть E или U:

здесь исключается непроверяемость для всех $sa \leftarrow E$ и неопределенность для $s? \leftarrow E$.

$$D1.\ ([s \leftarrow E] \leftarrow v^f) \equiv ([s \neg \leftarrow E] \leftarrow v^t)$$

$$([s \neg \leftarrow E] \leftarrow v^f) \equiv ([s \leftarrow E] \leftarrow v^t)$$

$$([s? \leftarrow E] \leftarrow v^f) \equiv ([s \leftarrow E] \leftarrow v^t) : ([s \neg \leftarrow E] \leftarrow v^t)$$

$$D2.\ ([s \leftarrow E] \leftarrow v^n) \equiv ([s? \leftarrow E] \leftarrow v^t)$$

$$([s \neg \leftarrow E] \leftarrow v^n) \equiv ([s? \leftarrow E] \leftarrow v^t)$$

Двузначный вариант для $sa \leftarrow E$:

1) если одно из $s \leftarrow E$ и $s \neg \leftarrow E$ истинно, то другое неистинно;

2) если одно из $s \leftarrow E$ и $s \neg \leftarrow E$ неистинно, то значение другого не определено;

3) $s? \leftarrow E$ равнозначно $\sim (s \leftarrow E) \cdot \sim (s \neg \leftarrow E)$.

§ 4. Логика существования

Система S^e логики существования образуется благодаря следующим дополнениям к ранее рассмотренным системам теории логического следования.

Алфавит: E и U — экзистенциальные предикаты.

Аксиомы AI:

$$1.\ U(a) \vdash E(a)$$

$$2.\ \neg E(a) \vdash \neg U(a)$$

$$3.\ ?E(a) \vdash \sim U(a)$$

$$4.\ U(a) \dashv\vdash \neg E(\sim a); \quad U(\downarrow X) \dashv\vdash \neg E(\downarrow \sim X)$$

$$5.\ \neg U(a) \dashv\vdash E(\sim a); \quad \neg U(\downarrow X) \dashv\vdash E(\downarrow \sim X)$$

Аксиомы AII:

$$1.\ E(a^1, \ldots, a^n) \dashv\vdash E(a^1) \cdot \ldots \cdot E(a^n)$$

$$2.\ \neg E(a^1, \ldots, a^n) \dashv\vdash \neg E(a^1) \vee \ldots \vee \neg E(a^n).$$

Аксиомы $AIII$:

$$1.\ (\exists a) X \dashv\vdash E(a \downarrow X),$$

где E не входит в X.

$$2.\ (\neg \exists a) X \dashv\vdash \neg E(a \downarrow X),$$

где E не входит в X.

Утверждения с кванторами, не содержащие предикат существования, всегда могут быть заменены на бескваторные с предикатами существования. Утверждения же с предикатами существования могут быть заменены на утверждения с кванторами и без предикатов существования лишь в случаях, когда $a \rightleftharpoons b \downarrow X$, где E не входит в X.

Аксиомы AIV:

$$1.\ E\downarrow(X \vee Y) \dashv\vdash E(\downarrow X) \vee E(\downarrow Y);$$
$$\neg E\downarrow(X \vee Y) \dashv\vdash \neg E(\downarrow X)\neg E(\downarrow Y)$$
$$2.\ E\downarrow(XY) \vdash E(\downarrow X) E(\downarrow Y);$$
$$\neg E(\downarrow X) \vee \neg E(\downarrow Y) \vdash \neg E\downarrow(XY)$$
$$3.\ U(\downarrow X) E(\downarrow Y) \vdash E\downarrow(XY);$$
$$U\downarrow(X \vee Y) \vdash U(\downarrow X) \vee E(\downarrow Y)$$
$$4.\ E(\downarrow X)\, ?\, E(\downarrow Y) \vdash\, ?\, E\downarrow(XY);$$
$$?\, E(\downarrow X)\, ?\, (\downarrow E Y) \vdash\, ?\, E\downarrow(XY)$$

Аксиомы AV:

$$1.\ E(a\downarrow X) \vdash E(a),$$

где E не входит в X.

$$2.\ X \vdash E(\downarrow X); \quad U(\downarrow X) \vdash X$$
$$3.\ E(a)\,\alpha\, E(a\downarrow P) \vdash E(a\downarrow \alpha P),$$

где α есть $\neg$ или ?

Аксиома AVI:

$$\vdash \neg E(\sim aa)$$

Правило вывода: если $\vdash X$, то $\vdash U(\downarrow X)$.

Согласно правилу вывода, все логически истинные (принимаемые в логике) утверждения универсальны. Если $\vdash U(a)$ не получается по правилу вывода, то доказуемые $\vdash U(a)$ получаются лишь в силу AVI и AI. В частности, будет доказуемо

$$\vdash U(a \vee \sim a)$$

Для этих случаев имеет силу теорема:

*Т*3. $\vdash U(a)$ доказуемо, если и только если будет доказуемо $\vdash a^*$, где a^* получается путем замены терминов, входящих в a, высказываниями.

Классический случай (система S_c^e) получается так:

1) аксиомы AI принимают вид $U(a) \vdash E(a)$, $\sim E(a) \vdash \sim U(a)$, $U(a) \dashv\vdash \sim E(\sim a)$, $U(\downarrow X) \dashv\vdash \sim E(\downarrow \sim X)$;

2) в аксиомах AII — AV оператор $\neg$ заменяется на $\sim$; а все аксиомы с оператором ? исключаются.

Если X есть высказывание, то $\downarrow X$ есть термин события (или состояния). Последний есть субъект. Читается $\downarrow X$ как «Тот факт, что X», «То, что X», «То, о чем говорится в X» и т. п. Например, из высказываний «Земля вращается вокруг Солнца» и «Все металлы проводят электричество» образуются термины событий «Тот факт, что Земля вращается вокруг Солнца» и «Тот факт, что все металлы проводят электричество». В дальнейшем там, где структура высказываний безразлична, вместо символов вида $\downarrow X$ для терминов событий будем употреблять малые латинские буквы x, y, z с индексами или без индексов. Большими латинскими буквами X, Y, Z будем изображать высказывания, из которых эти термины образуются.

События существуют или не существуют в некоторой данной или в любой ситуации. Последняя может быть задана явно или предполагаться (быть ясной из контекста). Она может быть задана путем: 1) указания на пространственную область; 2) указания на время; 3) перечисления некоторого множества событий; 4) комбинирования способов 1—3. Будем говорить, что заданы координаты события, если каким-либо из способов 1—4 задана ситуация, в которой оно существует. Если координаты безразличны по тем или иным причинам, фиксирование этого обстоятельства есть частный случай фиксирования координат.

*D*1. Событие x будем называть локальным, если X истинно в одних координатах и неистинно в других, и универсальным, если X истинно в любых координатах. Локальные события и образуют ту предметную область, для которой были изобретены модальные знаки.

Мы не будем вводить особые знаки для координат событий, чтобы не усложнять символики. Но условимся, что они в случае надобности могут быть приписаны на основе следующих соглашений:

1) к каждому высказыванию может быть приписан знак координат события, о котором говорится в этом высказывании;

2) в пределах одного и того же утверждения будет предполагаться тождество координат для всех событий, о которых говорится в этом утверждении, так что ко всем высказываниям, входящим в это утверждение, могут быть приписаны одинаковые знаки координат (или к утверждению

в целом может быть приписано выражение «в одних и тех же координатах» или «для одних и тех же координат»).

Модальными предикатами называют предикаты «возможно», «необходимо» и другие производные от них предикаты. Предикаты «возможно» и «необходимо» суть основные модальные предикаты. Будем их изображать соответственно символами M и N. Высказывания с этими предикатами имеют такой вид:

1) Mx — «x возможно», «Наступление x возможно», «x может наступить».

2) $\neg Mx$ — «x невозможно».

3) $?Mx$ — «Нельзя установить, Mx или $\neg Mx$».

4) Nx — «x необходимо», «x обязательно наступит», «Наступление x неотвратимо (неизбежно)».

5) $\neg Nx$ — «x ненеобходимо».

6) $?Nx$ — «Нельзя установить, Nx или $\neg Nx$».

Выражение «Нельзя установить» означает, что в силу сложившихся в данной области науки условий мы не имеем оснований для того, чтобы отнести событие x к числу возможных (необходимых) событий, и точно так же не имеем оснований для того, чтобы отнести это событие к числу невозможных (ненеобходимых).

Изображение модальных высказываний приведенными символами есть, конечно, их схематизация и стандартизация. В фактических языках модальные знаки могут занимать и другие позиции. Например, в высказывании «s может иметь P» слово «может» расположено так, что его характер как предиката скрыт; но, зная правила трансформации, мы вправе заменить это предложение на такое: «Возможен s, который имеет P».

Модальные высказывания в нашем понимании суть высказывания о модальности событий. Иногда от этого отличают модальность высказываний и рассматривают выражения вида «X есть возможное (необходимое и т. д.) высказывание». Но на деле модальность высказываний так или иначе сводится к модальности событий. Так, если потребовать разъяснить смысл выражения «X есть необходимое высказывание», то в конце концов выяснится, что здесь либо вообще можно обойтись без термина «необходимо» (поскольку, например, имеют в виду то, что X всегда истинно, тавтологично), либо имеется в виду необходимость события x.

Модальность события надо отличать от модальности поиска события. Последний точно так же есть событие, но модальность его не всегда совпадает с модальностью события, которое хотят обнаружить. Единственное правило, которое здесь можно сформулировать, — невозможное событие невозможно обнаружить.

Значения истинности модальных высказываний с предикатами M и N определяются так:

$D1$. Если Nx истинно, то X истинно; если Nx неистинно, то значение X остается неопределенным. Если X может (не может) быть неистинным, то Nx неистинно (истинно).

$D2$. Если X может быть (не может быть) истинным, то Mx истинно (неистинно). Если Mx истинно, то значение X не определено; если Mx неистинно, то X неистинно.

§ 6. Значение модальных предикатов

Чтобы ответить на вопрос о том, каково значение терминов M и N, надо спросить у исследователей, использующих их, следующее: почему они то или иное событие считают возможным, необходимым и т. д. И нетрудно будет убедиться в том, что в большом числе случаев, когда модальные знаки употребляются, без них в принципе можно обойтись, — они сводятся к другим знакам. Так, в некоторых случаях Mx есть замена $(\exists t)\ X$. Однако есть случаи, когда модальные знаки не могут быть заменены никакими другими, когда они выполняют специфическую, свойственную только им роль.

В этой специфической роли они появляются прежде всего тогда, когда приходится иметь дело с прогнозами относительно будущих событий, наступление или ненаступление которых зависит от стечения обстоятельств. Общая схема введения модальных предикатов для таких случаев может быть описана таким образом.

Пусть имеются знания: 1) если наступает событие $y^1 y^2 \ldots y^n$, то (вслед за этим, через такое-то время и т. п.) наступает событие x; 2) если наступает событие $z^1 z^2 \ldots z^m$, то не наступает событие x. Первое пусть будет W, второе — V. Каждое из $y^1, \ldots, y^n$ будем называть обстоятельством, способствующим наступлению x, а каждое из $z^1, \ldots, z^m$ — препятствующим.

Для осуществления прогнозов научным путем (в отличие от предположений и догадок, не имеющих логических оснований) требуется следующее: 1) знания типа W и V; 2) знание о данной, наличной ситуации (обозначим U). Знания W

и V назовем критериями прогнозов, а U — базой прогнозов. Характер прогнозов зависит от характера W, V и U.

Если критерии прогноза даны, то характер прогноза зависит от его базы, т. е. от U. Здесь возможны различные случаи (если даже допустить, что мы можем данную ситуацию описать сколь угодно полно без ошибок): 1) имеются все благоприятные обстоятельства; 2) имеются все препятствующие обстоятельства; 3) имеются некоторые благоприятные, нет препятствующих; 4) имеются некоторые препятствующие, нет благоприятных; 5) имеются некоторые благоприятные и некоторые препятствующие. Логически исключается лишь случай, когда имеются все благоприятствующие обстоятельства и все препятствующие.

При осуществлении прогнозов, естественно, требуются какие-то знаки, которые в обобщенной форме фиксировали бы характер базы прогноза. Это и выполняют модальные знаки: 1) если даны все благоприятствующие обстоятельства, то событие необходимо (в этих координатах); 2) если даны все препятствующие обстоятельства, то событие невозможно; 3) прочие промежуточные варианты (различные сочетания благоприятных и препятствующих обстоятельств) дают прочие возможные варианты модальной оценки событий.

Указанная схема не гарантирует во всех случаях истинные результаты. Это — схема введения модальных знаков, и ничего более. В достаточно большом числе случаев по этой схеме получаются удовлетворительные результаты, и это — эмпирический факт. Это оправдывает риск и во всяком случае раскрывает значение модальных знаков. А истинность результатов в том или ином случае зависит от точности критериев прогноза, от их эффективности, от точности и полноты базы прогноза, от опыта делающих прогнозы и т. п.

Мы привели идеальную схему. На деле же все обстоит сложнее. На деле возможно, что одни и те же обстоятельства попадают в число благоприятных и неблагоприятных, что число критериев прогноза больше двух и между ними имеются сложные взаимоотношения, что данная ситуация сама меняется, база прогноза недостаточно полна, что проводятся логические рассуждения, делаются допущения и т. п. Но при всех этих обстоятельствах несомненно одно: модальные предикаты суть сокращенное обозначение некоторых типов базы прогноза относительно соответствующих критериев прогноза. Так что (подобно предикату E) здесь нельзя выбрать предметы, находящиеся в соответствии с M, N и т. д. Но можно указать тип базы и критериев прогноза, о котором идет речь в высказывании с M, N и т. д.

К прошлым и настоящим событиям точно так же применяют модальные оценки. Но это имеет смысл исключительно ретроспективно: мы как бы переносим себя во время, когда не было интересующего нас события или еще не наступила ситуация, в которой произошло некоторое событие, и переносим критерии прогноза; в зависимости от того, какая получается при этом база прогноза, дается и модальная оценка наступления или ненаступления события. Этим объясняется то, что не все существующие или существовавшие события оцениваются как необходимые и не все неосуществившиеся в прошлом оцениваются как невозможные. Однако модальным оценкам прошлых и настоящих событий в науке придают весьма небольшое значение.

§ 7. Логические принципы введения модальностей

Введение модальных предикатов в употребление в той или иной области науки зависит от условий и потребностей этой науки. Если потребность в них появляется, то удовлетворение ее должно считаться с логическими принципами. В частности, необходимо точно знать, имеет место классический или неклассический случай (последний фактически встречается чаще).

Для любых случаев не всегда верны $Mx : M \sim x$ и $Nx : N \sim x$, поскольку встречаются случаи, когда верны $MxM \sim x$ и $\neg Nx \neg N \sim x$. Но всегда $\sim (NxN \sim x)$. В общем случае неверно $?Mx \rightarrow ?Nx$.

Предикаты M и N логически сопряженны, так что один можно определить через другой. Второй категорически сильнее первого.

§ 8. Логические модальности

Какие события, изучаемые той или иной наукой, являются возможными, необходимыми и т. д., это выясняется в самой данной науке. Но логика устанавливает границы, за которые никакая наука не может выйти при определении классов возможных, необходимых и т. д. событий. Эти пределы образуют так называемые логические модальности; а если модальность (возможность, необходимость и т. п.) событий выясняется путем конкретного исследования в той или иной данной науке, то она называется фактической или эмпирической.

Логические модальные предикаты будем изображать символами:

1. LN — логически необходимо;
2. LM — логически возможно.

Их свойства полностью определяются в логике.

D1. LNx, если и только если доказуемо $\vdash X$.

$D2.\ LMx \equiv \sim LN \sim x.$

Отношение логических и обычных модальностей определено утверждениями:

$$A1.\ LNx \rightarrow Nx$$
$$A2.\ Mx \rightarrow LMx,$$

из которых следует, что LN должен быть категорически сильнее LM.

§ 9. Случайность

Предикат «случайно» (будем употреблять символ C) определяется как производный от M:

$$D1.\quad Cx \equiv MxM \sim x$$
$$D2.\ \neg Cx \equiv Mx \neg M \sim x$$
$$D3.\ ?Cx \equiv Mx ?M \sim x$$

В классическом случае достаточно:

$$Cx \equiv MxM \sim x, \quad \sim Cx \equiv Mx \sim M \sim x.$$

§ 10. Модальные операторы

Пусть символы

$$Mod,\ Mod^1,\ Mod^2,\ \ldots$$

каждый по отдельности есть любой из αM, αN и αC, а различие индексов обозначает лишь то, что эти знаки могут быть взяты в различных комбинациях.

Через модальные предикаты можно определить особого рода операторы, подобные кванторам, — модальные операторы.

$$D1.\ (Mod\ a)\ X \equiv Mod \downarrow (E(a \downarrow X))$$

Высказывания вида $(Mod\ a)\ X$ читаются так: «Возможен a такой, что X», «Необходим a такой, что X» и т. п. Например, «Возможен a такой, что a больше b». Они могут употребляться совместно с кванторами.

Через модальные предикаты можно определить также модальные операторы другого типа:

$$D2.\ (s\ Mod\alpha \leftarrow P) \equiv Mod \downarrow (s\alpha \leftarrow P)$$

Пример: «Студент может не сдать экзамен», что тождественно по смыслу с «Возможно, что студент не сдаст экзамен».

§ 11. Модальная логика

Система S^m модальной логики получается благодаря таким дополнениям к ранее рассмотренным системам теории логического следования.

Алфавит: M, N, C, LM, LN — модальные предикаты.

Аксиомы AI.

1. $Nx \dashv\vdash \neg M \sim x$
2. $\neg Nx \dashv\vdash M \sim x$
3. $Cx \dashv\vdash MxM \sim x$
4. $\neg Cx \dashv\vdash Mx \neg M \sim x$
5. $?Cx \dashv\vdash Mx ?M \sim x$
6. $LNx \dashv\vdash \sim LM \sim x$

Аксиомы AII:

1. $Nx \vdash Mx$
2. $\neg Mx \vdash \neg Nx$
3. $?Mx \vdash \sim Nx$
4. $LNx \vdash Nx$
5. $Mx \vdash LMx$

Аксиомы $AIII$:

1. $M(x \vee y) \dashv\vdash Mx \vee My$
2. $\neg M(x \vee y) \dashv\vdash \neg Mx \neg My$
3. $M(xy) \vdash MxMy$
4. $\neg Mx \vee \neg My \vdash \neg M(xy)$
5. $NxMy \vdash M(xy)$

6. $N(x \vee y) \vdash Nx \vee My$.
7. $Mx\,?\,My \vdash\, ?\,M(xy)$
8. $?\,Mx\,?\,My \vdash\, ?\,M(xy)$

Аксиомы AIV:

1. $Mod(a) \dashv\vdash Mod\downarrow(E(a))$
2. $(Mod\ a)\,X \dashv\vdash Mod(a\downarrow X)$
3. $(Mod(a,\ b))\,X \dashv\vdash (Mod\ a)\,X\,(Mod\ b)\,X$
4. $(Mod^1\,a)(Mod^2\,b)\,X \dashv\vdash (Mod^1\,a)\,X\,(Mod^2\,b)\,X$,

где Mod, Mod^1 и Mod^2 суть αN и βM в любых комбинациях.

Аксиомы AV:

1. $(Mod\ a)\,X\,(N(a\downarrow X))\,Y \vdash Mod(\downarrow Y)$
2. $Mod\downarrow((\text{ꓘ}a)\,X) \dashv\vdash (\text{ꓘ}a)\,Mod(\downarrow X)$
3. $(\text{ꓘ}a)(Mod\ b)\,X \dashv\vdash (\text{ꓘ}a)((Mod\ b)\,X)$
4. $(Mod\ a)\,X\,(\forall a\downarrow X)\,Y \vdash (Mod\ a)\,Y$,

где Mod есть любой из αN и βM, а ꓘ — любой из $\gamma\forall$ и $\gamma\exists$.

Аксиомы AVI:

1. $\vdash (X \to Y) \to \neg M(x \sim y)$
2. $\vdash M(x \sim y) \to (X \neg\to Y)$
3. $\vdash (X \to Y)\,Mx \to My$; $\vdash (X \to Y)\,Nx \to Ny$
4. $\vdash (X \to Y) \neg My \to \neg Mx$; $\vdash (X \to Y) \neg Ny \to \neg Nx$
5. $\vdash (X \to Y)\,?\,My \to \sim Mx$; $\vdash (X \to Y)\,?\,Ny \to \sim Nx$
6. $\vdash MxMy\,(X \neg\to \sim Y)(Y \neg\to \sim X) \to M(xy)$

Аксиомы $AVII$:

1. $Mod\ x \vdash N\downarrow(Mod\ x)$
2. $M\downarrow(Mod\ x) \vdash Mod\ x$,

где Mod есть любой из αM и βN.

Правила вывода:

1. Если $\vdash X$, то Nx.
2. Если $X \vdash Y$, то $Nx \vdash Ny$ и $Mx \vdash My$.
3. Если $X \vdash Y$ и при этом в случае S^s и S^c в X и Y входят одинаковые элементарные высказывания, то $\neg Ny \vdash \neg Nx$, $?Ny \vdash \sim Nx$, $\neg My \vdash \neg Mx$, $?My \vdash \sim Mx$.

Классический случай получается путем вычеркивания всех аксиом и правил с оператором неопределенности, замены в оставшихся аксиомах и правилах отрицания $\neg$ на отрицание $\sim$ и исключения повторений.

Возможности событий различаются:

1) топологически (одно событие более или менее возможно, чем другое, или так же возможно, как другое);

2) по величине.

Величина (степень) возможности события называется вероятностью события. Вероятность x будем записывать символом

$$p(x)$$

Принято вероятности изображать числами от 0 до 1. Вероятности приписываются событиям по определенным правилам, которые специально изучаются в математической теории вероятностей. В рамках логики свойства вероятностей определяются системой утверждений, которую мы приведем ниже.

Выражения, фиксирующие вероятности событий, суть модальные предикаты, которые благодаря правилам трансформации принимают такой вид, что эту их логическую природу непосредственно усмотреть нельзя. Высказывания с вероятностными предикатами имеют вид «x возможно со степенью (с величиной) α», «x возможно со степенью больше, чем α» и т. п. По правилам трансформации им придают вид «Величина (степень) возможности x равна α», «Величина (степень) возможности x больше α» и т. п.

Логика вероятностей S_p^m получается благодаря таким дополнениям к S^m.

Алфавит: $p=\alpha$, $p>\alpha$, $p<\alpha$, $p\geqslant\alpha$ и $p\leqslant\alpha$, где $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, суть предикаты вероятности.

Вместо символов вида $(p=\alpha)(\downarrow X)$, $(p\geqslant\alpha)(\downarrow X)$ и т. п. будем употреблять принятые символы вида $p(x)=\alpha$, $p(x)\geqslant\alpha$ и т. п.

Аксиомы S_p^m:

1. $\vdash 0\leqslant p(x)\leqslant 1$
2. $(p(x)=0) \dashv\vdash \neg Mx$
3. $(p(x)=1) \dashv\vdash Nx$
4. $(0<p(x)\leqslant 1) \dashv\vdash Mx$
5. $(0\leqslant p(x)<1) \dashv\vdash M\sim x$
6. $\vdash p(x^1\cdot\ldots\cdot x^n)\leqslant min(p(x^1),\ldots, p(x^n))$
7. $\vdash p(x^1\vee\ldots\vee x^n)\geqslant max(p(x^1),\ldots, p(x^n))$
8. $(X\rightarrow(p(y)=\alpha))(p(x)=\beta)\vdash(p(y)\leqslant min(\alpha,\beta))$
9. $(p(X\rightarrow Y)=\alpha)\dashv\vdash(X\rightarrow(p(y)=\alpha))$

§ 13. Термины с модальностями

Встречаются предикаты, смысл которых определяется (явно или неявно) утверждениями типа

$$s\alpha \leftarrow Q \equiv Mod \downarrow (s\alpha \leftarrow P).$$

Примеры такого рода предикатов: «растворим в воде», «теплопроводен», «светонепроницаем» и т. п.

Особый интерес здесь представляют предикаты, фиксирующие потенциальные признаки (т. е. случай, когда *Mod* есть *M*, а α пусто). Пусть, например признаки P^1 и P^2 таковы, что

$$\neg M \downarrow ((s \leftarrow P^1)(s \leftarrow P^2)) \text{ и } M \downarrow (s \leftarrow P^1) \cdot M \downarrow (s \leftarrow P^2).$$

Примем определения:

$$s \leftarrow Q^1 \equiv M \downarrow (s \leftarrow P^1) \text{ и } s \leftarrow Q^2 \equiv M \downarrow (s \leftarrow P^2).$$

Согласно условию и определениям будет истинно утверждение

$$(s \leftarrow Q^1)(s \leftarrow Q^2).$$

Например, одно и то же тело нельзя охладить до минус 20° и в то же время нагреть до плюс 20°; однако встречаются тела, которые охлаждаемы до минус 20° и нагреваемы до плюс 20°. Иногда подобные потенциальные предикаты создают видимость правомерности логических противоречий.

§ 14. Модальная и многозначная логика

Свойства синталогических терминов, как и свойства логических операторов, не зависят от числа значений истинности содержащих их высказываний. Это видно уже из того, что мы их определяем, не предполагая какой-либо определенный вариант набора основных значений истинности. К тому же заключению приводит анализ попыток связать свойства этих терминов с той или иной системой энзначной логики. Покажем это на примере модальных высказываний.

Возьмем такое определение знака возможности в четырехзначной логике (значения суть 1,2,3,4): если *X* имеет значение 1 или 2, то *Mx* имеет значение 1; если *X* имеет значение 3 или 4, то *Mx* имеет значение 3. Его можно рассматривать исключительно как средство решения определенной технико-логической задачи: в некоторой аксиоматической системе модальной логики доказуемы все тавтологии данной четырехзначной логики, в которой наряду с пропозициональными логическими константами определяется знак возможности. Но это определение нельзя рассматривать не только как определение смысла предиката возможности (об этом мы уже говорили выше), но даже как определение значений истинности высказываний с предикатом возможности.

Пусть 1 есть истинность. Какое из остальных значений следует принять за ложность? Если 2 или 4, то высказывание Mx не может быть ложным, что не соответствует фактам. Если ложность есть 3, то Mx всегда ложно при ложном X, что опять-таки не соответствует фактам. Ряд нелепостей, получаемых при истолковании рассматриваемого определения Mx как определения значений истинности для высказываний такого типа, можно продолжить.

В пользу нашего тезиса говорит и тот факт, что все проблемы модальной логики, решаемые с помощью четырехзначной логики, решаются с тем же успехом посредством особым образом построенных систем с тремя, восемью, шестнадцатью и т. п. значениями, а также... с двумя значениями. Одним словом, многозначная логика есть удобное средство решения многих проблем логики. Но она влияет на класс правил логики только в тех случаях, когда в правилах логики фигурируют значения истинности высказываний.

§ 15. Классы

В логике классов (множеств) приходится иметь дело с терминами классов, которые образуются с помощью особого классообразующего оператора «класс» («множество»), с предикатом включения индивидов в класс и с предикатом включения классов в класс. Будем употреблять такие обозначения:

1) K — классообразующий оператор «класс»;

2) $\in$ — двухместный предикат включения индивидов в класс. Слово «множество» мы рассматриваем как синоним слова «класс». Так что K есть множествообразующий оператор.

$D1$. Образовать (и выбрать) некоторый класс индивидов — значит построить термин «Класс индивидов из области значения t», где t есть данный термин, причем t есть субъект. Будем такой термин записывать символом вида

$$Kt$$

где K — классообразующий оператор. Индивиды из области значения t суть элементы Kt.

$A1$. Kt есть термин класса, если и только если t есть субъект.

А2. Kt есть индивидуальный термин. Kt есть субъект.

Образовать класс индивидов — значит буквально сказать «Класс индивидов из области значения такого-то термина (таких-то терминов)», т. е. построить определенный термин. В языках это может выразиться в различной форме, но суть всегда такова. Для существования класса достаточно его образовать. Например, построив выражение «класс богов», мы образовали класс богов, и этот класс стал существовать как особый предмет, хотя считается, что боги эмпирически не существуют.

Различие класса и энки предметов наглядно видно из такого примера. Тройка целых чисел таких, что сумма кубов двух из них равна кубу третьего, не существует. Но класс таких троек существует, если только мы построили выражение «Класс троек целых чисел таких, что сумма кубов двух из них равна кубу третьего». Этот класс может исследоваться как особый существующий предмет. О нем, в частности, можно сказать, что он пуст. Если всякий предмет есть энка, то нечто аналогичное неверно для класса: возможен класс из одного элемента, допустим — a; но чтобы образовать здесь класс, надо сказать «Класс, элементом которого является a».

При образовании класса должны быть выполнены следующие принципы:

$A3$. Каждый элемент класса может быть выбран независимо от образования (и выбора) самого класса, — принцип независимости элементов от класса.

$A4$. Относительно любого индивида возможно установить, является он элементом данного класса или нет, — принцип определенности.

$D2$. Класс индивидов существует (не существует), если он образован (не образован) в соответствии с $D1$ и принципами независимости и определенности.

$$A5.\ \sim(Kt \leftarrow E) \equiv (Kt \urcorner \leftarrow E)$$

Высказывание о том, что индивид из области значения t^1 есть элемент Kt^2 (включается в Kt^2), будем записывать символом

$$\in (t^1, Kt^2).$$

Это — высказывание с бинарным субъектом (t^1, Kt^2) и двухместным предикатом $\in$ («первый включается во второй», «первый есть элемент второго»). Причем t^1 не обязательно есть индивидуальный термин. Так что высказывания с предикатом $\in$ могут оказаться локальными. В дальнейшем будем вместо выражений $\alpha\in(t^1, Kt^2)$ использовать более наглядные и привычные выражения

$$t^1\alpha \in Kt^2.$$

Поскольку неопределенности исключены, можно принять

$$A6: \sim (t^1 \in Kt^2) \equiv (t^1 \neg \in Kt^2)$$
$$A7. \sim (t^1 \in Kt^2) \equiv (t^1 \in K \sim t^2)$$

Символ K (и слово «класс») в указанном выше смысле не есть термин той науки, в которой терминами являются t и Kt: это — логическое средство образования нового термина из данного термина t и тем самым средство выделения (выбора) особого предмета — всех индивидов из области значения t.

Слово «класс», однако, употребляется и как термин, например в выражениях «пустой класс», «конечный класс» и т. п. Будем в таком случае употреблять символ kl.

Интуитивно термин kl означает следующее: если a есть термин, то Ka есть kl (то класс a есть класс). В другой форме: если a есть термин, то $Ka \in Kkl$ (то класс a включается в класс классов). Подставляя на место a термин kl, получим: $Kkl \in Kkl$ (т. е. класс классов есть элемент самого себя), что не согласуется с $A3$. Однако приведенное рассуждение содержит ошибки, поскольку определение термина kl построено неверно. Оно должно иметь такой вид:

$D3$. Пусть kl будет термином таким, что если a есть термин, то

$$kl \to Ka$$

(т. е. если a есть термин, то Ka есть класс). Другой вариант: пусть kl будет термином таким, что если a есть термин, то

$$Ka \in Kkl$$

(т. е. если a есть термин, то Ka есть элемент класса классов).

Выражение «Пусть kl будет термином» имеет определенные логические свойства: оно превращает вещь вида kl, которая до этого и независимо от этого не была термином, в термин. И выражение «если a есть термин» благодаря этому позволяет в качестве a брать только такие вещи, которые уже являются терминами или становятся терминами независимо от принятия $D3$. Короче говоря, $D3$ есть определение с переменной, правило для которого указано выше. Роль переменной здесь играет a (область ее значения — термины, не зависящие по значению от kl).

Согласно правилу построения определений такого типа, из $D3$ не может быть получено следствие «Если a есть термин, то $(kl \rightarrow Ka)$, $(Ka \in Kkl)$, $(\forall a)(kl \rightarrow Ka)$, $(\forall a)(Ka \in \in Kkl)$», где a есть любой термин, в том числе термин kl. Не могут быть получены и утверждения $kl \rightarrow Kkl$ и $Kkl \in \in Kkl$. Из $D3$ может быть выведено лишь такое утверждение:

$T1$. Если a есть термин, не зависящий по значению от kl (т. е. значение которого может быть установлено без kl), то $kl \rightarrow Ka$ (то $Ka \in Kkl$).

Вопрос о том, как быть с упомянутыми выше утверждениями, зависит от внешних для них обстоятельств: они могут быть приняты или не приняты как аксиомы в зависимости от того, нужно это или нет, и в зависимости от того, приведет это к противоречиям или нет. Если принята аксиома $A3$, то $Kkl \in Kkl$ исключается.

Выражение «Класс всех классов» термином класса не является по той простой причине, что выражение «всех классов» термином не является (т. е. согласно $D1$). Термином является лишь выражение «класс классов». Но это не значит, что в него включаются все классы. Термином будет выражение «Класс, который является классом классов и включает самого себя». Такой класс не существует согласно $D2$. Элементами некоторого класса могут быть классы не только в случае Kkl.

Чтобы образовать класс каких-то классов, надо выполнить одну из двух операций:

1) образовать термин «Класс, элементы которого суть классы $Kt^1, \ldots, Kt^n$, где $n \geqslant 2$ и все термины $Kt^1, \ldots, Kt^n$ суть термины классов;

2) образовать термин t^* такой, что $t^* \rightarrow Kt^1, \ldots, t^* \rightarrow Kt^n$, и затем построить термин Kt^*. Примеры t^*: «пустой класс», «конечный класс», «бесконечный класс»

и т. п. Соответственно получим Kt^*: «Класс пустых классов», «Класс конечных классов» и т. п.

Часто тот факт, что некоторый термин есть термин класса классов, в обычных и научных языках бывает скрыт от непосредственного видения. Возьмем, например, выражения «Класс офицеров, служащих в одном полку», «Класс членов одной партии», «Класс молекул, находящихся в данном объеме пространства» и т. п. Хотя они по видимости имеют структуру Kt, где t не есть термин класса, однако на самом деле они суть термины типа t^*. Так, термин «Класс офицеров, служащих в одном полку», является родовым по отношению к терминам «Класс офицеров 110 авиаполка», «Класс офицеров 109 авиаполка» и т. п., но сам еще не является термином класса типа Kt.

§ 16. Парадокс класса нормальных классов

Выражение «нормальный класс» (или «нормальное множество») определяют так: класс называется нормальным, если и только если он не является элементом самого себя. Это определение непригодно потому, что в нем явно не выражено то, что класс есть всегда класс чего-то. Примем следующее определение, устраняющее этот недостаток:

$D1$. Если a есть термин и при этом $\sim (Ka \in Ka)$, то Ka будем называть нормальным классом (вместо выражения «нормальный класс» будем писать букву n).

Выражение «Будем называть» имеет логические свойства, которые явно выражаются в случае с $D1$ таким образом:

D^*1. Пусть n будет термином таким, что $n \rightarrow Ka$ (или $Ka \in Kn$), если и только если a есть термин и при этом $\sim (Ka \in Ka)$.

Здесь опять-таки имеет место определение с переменной: роль переменной здесь играет буква a; область значения a — термины, не зависящие по значению от n.

При получении парадокса класса нормальных классов забывают (или не замечают) того, что на место a не может быть подставлен термин n и любой другой термин, определяемый через n, и определению придают вид утверждения A: если a есть термин, и $\sim (Ka \in Ka)$, то $Ka \in Kn$; если a есть термин и $Ka \in Ka$, то $\sim (Ka \in Kn)$. Подставляя на место a термин n, получают утверждения B: если $\sim (Kn \in Kn)$, то $Kn \in Kn$; если $Kn \in Kn$, то $\sim (Kn \in Kn)$.

Но утверждение A неверно. Верным будет такое следствие D^*1: если a есть термин, не зависящий по значению от n, и $\sim (Ka \in Ka)$, то $Ka \in Kn$; если $Ka \in Ka$, то при этом же условии относительно a будет $\sim (Ka \in Kn)$. А так как n зависит по значению от самого себя (мы не можем знать значение n, не определив n), получить утверждение B нельзя.

Вопрос же о том, принимать или не принимать утверждение $n \rightarrow Kn$ (и вытекающее из него следствие $Kn \in Kn$), остается открытым. Оно безразлично по отношению к D^*1 в том смысле, что приняв $n \rightarrow Kn$ и D^*1, мы еще не можем получить отсюда логическое противоречие. Противоречие не получится и в случае, если мы примем D^*1 и $\sim (Kn \in Kn)$ (и вытекающее из него следствие $\sim (n \rightarrow Kn)$).

§ 17. Виды классов

Если образован Kt, не представляет труда построить такой t^i, который будет считаться индивидуальным и для которого будет иметь силу $t^i \in Kt$. Вопрос о существовании обозначаемых этим термином индивидов при этом остается открытым. Так что среди элементов класса могут оказаться несуществующие индивиды. Это порождает некоторые практические неудобства. На практике оперируют более узким понятием класса: в класс включают существующие или возможные индивиды из области значения данного термина. Будем такие классы называть экзистенциальными и потенциальными и определим их так:

$$D1.\ K^e t = Df.\ K(t \downarrow E)$$

$$D2.\ K^m t = Df.\ K(t \downarrow M).$$

Потенциальные классы в свою очередь можно разделить на группы в зависимости от того, какая возможность имеет место — логическая или фактическая («физическая»). Экзистенциальные классы тоже можно различать по видам существования.

$D3$. $K^e t$ будем считать пустым, если для любого t^i такого, что $t \rightarrow t^i$, имеет место $\sim (t^i \leftarrow E)$, и непустым, если найдется такой t^i, что $(t \rightarrow t^i)(t^i \rightarrow E)$.

$D4$. Определение пустоты и непустоты $K^m t$, получается из $D3$ путем замены E на M.

$D5$. Kt экзистенциально (потенциально) пуст, если и только если $K^e t$ $(K^m t)$ пуст.

$D6$. Kt пуст, если и только если для любого индивидуального термина t^i имеет место $\sim (t^i \in Kt)$.

Определение универсального класса как класса, в который включаются все индивиды, ведет к противоречиям, так как построить такой класс невозможно (в силу принятых выше соглашений). Поэтому при определении универсального класса (как и пустого) надо исходить из того, что класс как-то образован в соответствии с принятыми правилами, т. е. уже дан.

$D7$. Kt является универсальным, если и только если для любого индивида t^i имеет силу $t^i \in Kt$.

$D8$. $K^e t$ ($K^m t$) универсален, если и только если для любого индивида t^i имеет силу $(t^i \downarrow E) \in K^e t$ (соответственно $(t^i \downarrow M) \in K^m t$).

$D9$. Kt экзистенциально (потенциально) универсален, если и только если $K^e t$ ($K^m t$) универсален.

$D10$. Классы, обозначаемые терминами вида Kt, суть первичные классы. Соответственно термины Kt суть первичные термины классов (или термины первичных классов).

С помощью первичных терминов классов образуются производные термины классов (термины производных классов; производные классы). Обычно рассматривают такие:

1) $Kt^1 \cap Kt^2$ — логическое произведение Kt^1 и Kt^2; аналогично $Kt^1 \cap Kt^2 \cap \ldots \cap Kt^n$ есть логическое произведение Kt^1, Kt^2, ..., Kt^n;

2) $Kt^1 \cup Kt^2$ — логическая сумма Kt^1 и Kt^2; аналогично $Kt^1 \cup Kt^2 \cup \ldots \cup Kt^n$ есть логическая сумма Kt^1, Kt^2, ..., Kt^n;

3) $\overline{Kt}$ — логическое дополнение Kt.

Эти классы можно определить различными способами. Если уже имеется теория терминов с операторами $\cdot$, $\vee$ и $\sim$, то определения будут иметь такой вид:

$$D11.\quad \overline{Ka} = Df.\, K(\sim a)$$

$$Ka^1 \cup Ka^2 \cup \ldots \cup Ka^n = Df.\, K(a^1 \vee a^2 \vee \ldots \vee a^n)$$

$$Ka^1 \cap Ka^2 \cap \ldots \cap Ka^n = Df.\, K(a^1 a^2 \ldots a^n)$$

§ 18. Отношения классов

Отношения классов характеризуются посредством предиката включения класса в класс. Будем для этой цели использовать символ $\subset$. Вместо символов вида $\subset(Kt^1, Kt^2)$ («Класс t^1 включается в класс t^2») будем употреблять более наглядные и близкие к обычному словоупотреблению символы вида

$$Kt^1 \subset Kt^2$$

$$D1.\ (Kt^1 \subset Kt^2) \equiv (\forall t^1)(t^1 \in Kt^2)$$

$D2$. Если $Kt^1 \subset Kt^2$, то Kt^1 есть подкласс класса Kt^2. Если $(Kt^1 \subset Kt^2) . \sim (Kt^2 \subset Kt^1)$, то Kt^1 есть собственный подкласс класса Kt^2.

§ 19. Логика классов

Теория логического следования S^{kl}, определяющая свойства терминов классов и предикатов включения индивидов и классов в класс, образуется благодаря таким дополнениям к ранее рассмотренным системам.

Алфавит:

1) K — классообразующий оператор;

2) $\in$ — предикат включения индивидов в класс;

3) $\subset$ — предикат включения классов в класс.

$D1$. Если a есть субъект, то Ka есть субъект.

Вместо $\in (a, Kb)$ и $\subset (Ka, Kb)$ будем использовать адекватные им символы $a \in Kb$ и $Ka \subset Kb$.

Аксиомы S^{kl}:

1. $(\exists a)(a \in Kb) \vdash (\exists b)(b \in Ka)$
2. $\sim (a \in Kb) \dashv\vdash (a \in K(\sim b))$
3. $(a \in Kb)(\forall b)(b \in Kc) \vdash (a \in Kc)$
4. $\vdash a \in K(a \vee b)$
5. $(Ka \subset Kb) \dashv\vdash (\forall a)(a \in Kb)$

Если кажется более удобным использовать символы $\overline{Ka}$, $Ka^1 \cup Ka^2 \cup \ldots \cup Ka^n$ и $Ka^1 \cap Ka^2 \cap \ldots \cap Ka^n$, то можно принять аксиомы или правила, позволяющие их заменять соответственно на $K(\sim a)$, $K(a^1 \vee a^2 \vee \ldots > a^n$ и $K(a^1 a^2 \ldots a^n)$.

§ 20. Квазиклассический случай в теории кванторов

Если принять в качестве аксиомы утверждение

$$\vdash (a \in Kb),$$

то на уровне квазиследования будут доказуемы утверждения

$$(\forall a) P(a) \vdash P(b), \quad P(b) \vdash (\forall a) P(a),$$

которые мы выше оценили как интуитивно парадоксальные. Приведенная аксиома выявляет неявное допущение, что области значения субъектов (на языке формальных построений — индивидных переменных) совпадают, лежащее в основе классического (и интуиционистского) исчисления предикатов. Как видим, в нашей теории это — лишь частный случай, формулируемый на основе теории терминов и логики классов.

§ 21. Функции

Для определения ряда логических терминов требуются предварительные определения других логических терминов, даваемые в различных разделах логики. К числу таких терминов относится, в частности, термин «функция», играющий большую роль в науке.

*D*1. Индивиду t^1 соответствует класс Kt^2, если и только если индивиду t^1 соответствует каждый из элементов класса Kt^2.

*D*2. Классу Kt^2 соответствует индивид t^1, если и только если каждому элементу класса Kt^2 соответствует индивид t^1.

*D*3. Классу Kt^1 соответствует класс Kt^2, если и только если каждому элементу класса Kt^1 соответствует некоторый непустой подкласс класса Kt^2.

*D*4. Если найден способ, с помощью которого для каждого индивида класса Kt^1 можно установить какой именно подкласс класса Kt^2 ему соответствует, то будем говорить, что задан (установлен, известен и т. п.) тип (вид, способ) соответствия класса Kt^2 классу Kt^1 или что задана функция t^2 от t^1.

Будем высказывания о том, что t^2 есть функция от t^1, записывать символами вида

$$t^2 \Leftarrow f\,(t^1),$$

где f обозначает способ соответствия, а $\Leftarrow$ есть знак соответствия. Здесь $\Leftarrow f$ есть предикат, а t^1 и t^2 суть субъекты. Так что на эти высказывания распространяется все, относящееся к высказываниям вида $P\,(a,\ b)$ вообще. Но они обладают особенностями, обусловленными способом их построения, т. е. свойствами их предикатов (типов функций).

*D*5. Термины из области значения t^1 суть аргументы $t^2 \Leftarrow f\,(t^1)$, а термины из области значения t^2 суть функционалы этой функции.

$D6$. Kt^1 есть область определения $t^2 \Leftarrow f(t^1)$, а Kt^2 — область значения.

$D7$. Отыскание функционалов $t_1^2, \ldots, t_m^2$ $(m \geqslant 1)$ для данного аргумента t_j^1 есть реализация $t^2 \Leftarrow f(t^1)$. Будем ее записывать символами

$$(t^2 = t_1^2, \ldots, t_m^2) \Leftarrow f(t^1 = t_j^1).$$

Этот символ можно читать так: если аргумент $t^2 \Leftarrow f(t^1)$ есть t_j^1, то функционал есть какой-либо из $t_1^2, \ldots, t_m^2$.

Соотношение функции и ее реализации определяется утверждением:

$$A1.\ (t^2 \Leftarrow f(t^1)) \rightarrow ((t^2 = t_1^2, \ldots, t_m^2) \Leftarrow f(t^1 = t_j^1))$$

Если заданы Kt^1 и Kt^2, то характер (вид) f определяется свойствами этих классов и задачей исследования. В частности, вид f может зависеть от определений, от результатов наблюдений и т. д. При этом обращаем внимание на следующее: само соглашение $t^2 \Leftarrow f(t^1)$ означает лишь то, что указано в $D4$; причины же, заставившие принять его, в нем самом не усматриваются; и в этом смысле оно не есть высказывание о какой-то эмпирической связи предметов или о логической связи терминов. Это — самостоятельная логическая форма. В частности, мы можем устанавливать функции, где аргументами являются временные или пространственные интервалы, которые сами по себе не являются причинами событий или посылками умозаключений.

В случае $t^2 \Leftarrow f(t^1)$ термины t^1 и t^2 могут быть энками из двух и более терминов. Обращаем внимание на то, что эти термины не зависят друг от друга по смыслу; аналогично не зависят друг от друга по смыслу индивидуальные термины из области их значения.

Пусть задана функция

$$\downarrow Y \Leftarrow f(\downarrow X^1, \ldots, \downarrow X^n),$$

а выражение вида

$$\downarrow Y_i \Leftarrow f(\downarrow X_i^1, \ldots, \downarrow X_i^n)$$

есть ее реализация. Для высказываний о таких функциях имеет силу утверждение

$$A2.\ (\downarrow Y \Leftarrow f(\downarrow X^1, \ldots, \downarrow X^n))\, X_i^1 \cdot \ldots \cdot X_i^n \rightarrow Y_i$$

§ 22. Число элементов класса

$D1$. Число элементов Kt есть ноль, если и только если Kt пуст.

$D2$. Число элементов Kt есть единица, если и только если t есть индивидуальный термин.

$D3$. Kt^1 и Kt^2 несовместимы, если и только если для любого индивида t^3 имеет силу утверждение: если t^3 включается в один из Kt^1 и Kt^2, то он не включается в другой из них.

$D4$. Если Kt^1 и Kt^2 несовместимы, то число элементов $Kt^1 \cup Kt^2$ есть сумма чисел элементов Kt^1 и Kt^2.

$D5$. Между Kt^1 и Kt^2 имеет место взаимнооднозначное соответствие, если и только если возможно каждому элементу одного из них поставить в соответствие один и только один элемент другого так, что попарно различным элементам одного ставятся в соответствие попарно различные элементы другого.

$D6$. Число элементов Kt^1 равно числу элементов Kt^2 (классы Kt^1 и Kt^2 равночисленны), если и только если имеет место взаимнооднозначное соответствие Kt^1 и Kt^2.

$D7$. Число элементов Kt^1 больше числа элементов Kt^2, если и только если имеет силу следующее: какой бы собственный подкласс Kt^3 класса Kt^1, находящийся во взаимнооднозначном соответствии с Kt^2, ни выбрали, останется такой элемент Kt^1, который не ставится в соответствие никакому элементу Kt^2.

$D8$. Число элементов Kt конечно, если и только если число элементов Kt есть единица или возможно построить такие Kt^1 и Kt^2 с конечным числом элементов, что Kt и $Kt^1 \cup \cup Kt^2$ равночисленны.

Выражение «Число элементов Kt бесконечно» есть литературный вариант отрицания того, что число элементов Kt конечно.

$T1$. Если $(Kt^1 \subset Kt^2)(Kt^2 \subset Kt^1)$, то между Kt^1 и Kt^2 имеет место взаимнооднозначное соответствие.

$T2$. Если один из Kt^1 и Kt^2 есть собственный подкласс другого и при этом конечен, то между Kt^1 и Kt^2 нет взаимнооднозначного соответствия.

Но известны случаи, когда имеет место взаимнооднозначное соответствие класса и его собственного подкласса, если они оба бесконечны (например, это имеет место для класса натуральных чисел вообще и четных чисел). Поэтому неверно (в общем случае) утверждение: если Kt^1 есть собственный подкласс Kt^2, то число элементов второго больше числа элементов первого. Неверно также утверждение: если числа элементов Kt^1 и Kt^2 бесконечны, то Kt^1 и Kt^2 равночисленны.

Число элементов классов фиксируется также выражениями «много», «мало», «очень много», «очень мало» и т. п. (это — неопределенные или архаические числа).

§ 23. Состав и мощность класса

$D1$. Выяснить состав класса — значит выяснить, какие индивиды включаются в него. Выяснить экзистенциальный (потенциальный) состав класса — значит выяснить, какие существуют (возможны) индивиды, являющиеся его элементами.

$D2$. Мощность класса есть число его элементов. Экзистенциальная (потенциальная) мощность класса есть число существующих (возможных) индивидов, являющихся его элементами.

Если задан класс и требуется выяснить его состав и мощность, то исследователь это делает всегда в какое-то определенное время. Это не всегда то время, которое может фигурировать в самом определении класса (например, «Русские писатели XIX века»), а именно то время, когда исследователь предпринимает какие-то действия, чтобы установить состав и мощность класса.

При этом класс может быть задан так, что в него включаются только те индивиды, которые существуют в это время. С этой точки зрения классы могут быть постоянными и переменными по составу и по мощности.

От различения конечных и бесконечных классов отличается различение ограниченных и неограниченных классов. Класс может быть задан так, что число его элементов будет бесконечным, но ограниченным в том смысле, что со временем не будут появляться новые его элементы. С другой стороны, мы можем ничем не ограничивать число элементов класса, но оно будет конечным.

§ 24. Отношения

Среди высказываний с многоместными предикатами имеются такие, которые имеют структуру

$$aaRb$$

или могут быть приведены к такому виду путем языковых трансформаций. Это, например, высказывания «a больше b», «a находится между b и c», «a в три раза тяжелее b» и т. п. Пример упомянутой трансформации: высказывание «a больше b в два раза» приводится к виду «a в два раза больше b». Эти высказывания и их внешние отрицания суть высказывания об отношениях. То, о чем говорится в них, суть отношения (т. е. если X есть высказывание об отношении, то $\downarrow X$ есть термин, обозначающий отношение).

В высказываниях $a\alpha Rb$ субъекты суть термины a и b, α означает наличие $\urcorner$ или ? или их отсутствие, а предикат есть выражение «первый R второй». Здесь R обозначает тип отношения, но не есть предикат. Он есть лишь часть предиката. Так, в высказывании «a больше b» субъекты суть a и b, предикат есть «первый больше второго», а слово «больше» есть знак отношения R. В дальнейшем в качестве знаков отношений будем употреблять символы R, R^1, R^2, .., различие индексов у которых будет означать, что отношения могут различаться («больше», «ближе», «одновременно» и т. п.). Поскольку предикаты отношений строятся из знаков R стереотипным образом, исследование знаков отношений есть исследование предикатов отношений (и в дальнейшем мы о них будем говорить как о предикатах).

Высказывания об отношениях разделяются на простые по построению (т. е. несводимые к другим высказываниям об отношениях) и производные, определяемые через простые (или сводимые к ним). Например, «a, b, c равны между собой» тождественно по смыслу с «a равен b» · «b равен c»; «a бабушка b» тождественно по смыслу с «Существует c такой, что если a мать c, то c отец или мать b». Мы принимаем допущение, что любые высказывания об отношениях либо являются простыми по построению (элементарными), либо являются производными от элементарных. Это — эмпирически данный факт. Так что в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением лишь элементарных высказываний об отношениях.

Элементарные высказывания об отношениях либо являются предположениями и соглашениями, либо фиксируют непосредственные наблюдения, либо получаются из высказываний с одноместными предикатами (из односубъектных высказываний). Например, «a вдвое больше b» могло быть получено из высказываний о величине a и о величине b, независимых друг от друга. В науке фактическое положение таково: если возникает потребность свести высказывание об отношении к совокупности односубъектных высказываний, то эта потребность так или иначе удовлетворяется. Отыскание методов такого сведения есть одна из возможных задач науки, в которой формулируется X.

Со структурной точки зрения простейшими высказываниями об отношениях являются бинарные — высказывания о бинарных (между двумя предметами) отношениях. Они имеют вид $a\alpha Rb$. Но термины a и b могут иметь вид $(a^1, \ldots, a^n)$ и $(b^1 \ldots, b^m)$. В таком случае получаются энарные высказывания, где «эн» более трех, — высказывания об энарных (тернарных и более) отношениях. Однако это имеет место лишь в том случае, когда энкой из двух и более терминов является b, а не a.

Дело в том, что высказывания $a\alpha Rb$ суть не просто высказывания об отношениях между предметами, но суть высказывания об отношениях одних предметов к другим. Так что число находящихся в данном отношении предметов не зависит от того, какой вид имеет термин a. Оно зависит от вида b: если b есть одинарный термин, то отношение бинарное; если b есть $(b^1, \ldots, b^m)$, то отношение $(m+1)$-арное.

Известны случаи, когда энарные (с «эн» более двух) высказывания сводятся к бинарным. Например, «a находится между b и c» в некоторых случаях может быть сокращением для «a дальше b, c дальше a». Но известны также случаи, когда такое сведение не производится. Например, для осмысленного оперирования высказыванием «Бологое находится между Москвой и Ленинградом» в некоторых случаях достаточно знать, что если поездом поедешь из Москвы в Ленинград (или обратно), то непременно проедешь через Бологое. С логической точки зрения тернарное высказывание здесь не сводится к совокупности бинарных.

Фактическое положение в науке таково: если возникает проблема свести некоторое энарное высказывание к бинарным, то положительное решение этой проблемы так или иначе находят. Отыскание методов такого сведения есть одна из возможных задач науки.

Внешнее отрицание отношений определяется по схеме:

$$\sim (a\alpha Rb) \equiv (a\beta Rb) : (a\gamma Rb),$$

где α, β и γ различаются так: если одна из этих букв есть $\urcorner$, то другая (любая) есть ?, а оставшаяся означает отсутствие обоих $\urcorner$ и ?.

Отношения разделяются на простые и сложные в зависимости от терминов, соответствующих им. Сложные термины отношений образуются по правилам $a\,(R^1\ \ R^2)b \equiv \equiv (aR^1b)\ \ (a\,R^2b)$, $a\,(R^1 \vee R^2)b \equiv (aR^1\,b) \vee (aR^2b)$ и т. п.

Общеизвестно разделение отношений на рефлексивные, симметричные, транзитивные и соответствующие им отрицательные виды.

§ 25. Сравнение

Два объекта a и b могут быть такими, что оба они имеют некоторые признаки $P^1, \ldots, P^n$, и такими, что один из них имеет некоторые признаки $Q^1, \ldots, Q^m$, а другой не имеет их. В такого рода случаях говорят о сходстве и различии объектов. В зависимости от числа признаков и от их важности говорят о малом или большом сходстве или различии. Строятся высказывания «a сходен с b», «a очень мало похож на b», «a сильно отличается от b», «a тождествен b» и т. п.

От сравнения объектов надо отличать сравнение их признаков по величине, в результате которого получаются высказывания

$$(P \downarrow a)\,\alpha R\,(P \downarrow b),$$

где R может быть отношением «равны», «больше», «на много меньше», «в n раз больше» и т. п. По некоторым правилам языковых трансформаций эти высказывания принимают вид

$$s^1 \alpha R P s^2,$$

где P — название признака, по которому происходит сравнение. Например, высказывание «s^1 тяжелее s^2» получается из высказывания «Вес s^1 больше веса s^2».

Возможность числовой оценки признаков полезна в случае сравнения объектов по двум и более различным признакам. Пусть, например, числовая оценка признаков s^1 дает величины $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$, а такого же рода оценка признаков s^2 — величины $\beta^1, \ldots, \beta^m$. Для сравнения s^1 и s^2 достаточно вычислить средний вес признаков s^1 (допустим, α^*) и средний вес признаков s^2 (допустим, β^*). Теперь высказывание об объектах s^1 и s^2 получается из сравнения α^* и β^*.

Сравнивающие высказывания все могут быть сведены к высказываниям с одноместными предикатами в следующем смысле: если имеется сравнивающее высказывание Z с субъектами s^1 и s^2, то в принципе могут быть найдены такие высказывания $s^1 \leftarrow (X \downarrow)$ и $s^2 \leftarrow (Y \downarrow)$, что «Если XY, то Z». Но это не означает, что подобное сведение всегда осуществляется практически. Часто сравнивающие высказывания фиксируют непосредственно наблюдаемые факты.

Высказывание о том, что s^1 превосходит s^2 по признаку P, будем изображать символом

$$s^1 (> P) s^2.$$

Соответственно $s^1 \urcorner (> P) s^2$ и $s^1 ? (> P) s^2$ суть его частное отрицание и неопределенная форма. Тогда выражения «уступает по признаку P» и «тождественно по признаку P» определяются как производные.

§ 26. Логика сравнения

Система S_1^r теории сравнения образуется благодаря таким дополнениям к ранее принятым системам.

Алфавит:

1) $>$ — знак превосходства («превосходит»);

2) $<$ — знак, противоположный превосходству («уступает»);

3) $=$ — знак тождества («тождественно»).

$D1$. Если Q есть предикат, то $(>Q)$, $(< Q)$ и $(= Q)$ суть предикаты.

В дальнейшем высказывания сравнения будем записывать в более наглядном виде

$a\alpha(> Q)b$, $a\alpha(< Q)b$, $a\alpha(= Q)b$.

Предикат Q в скобках и сами скобки будем для упрощения записи опускать, полагая, что во всех высказываниях, входящих в то или иное утверждение, имеется в виду один и тот же предикат Q.

Аксиомы AI:

1. $\vdash (a \urcorner > a)$
2. $(a > b) \vdash (b \urcorner > a)$
3. $(a \urcorner > b) \vdash (b > a) : (a = b)$
4. $(a > b)(b > c) \vdash (a > c)$
5. $(a > b)(b = c) \vdash (a > c)$
6. $(a \urcorner > b)(b \urcorner > c) \vdash (a \urcorner > c)$
7. $(a ? > b) \vdash (b ? > a)$

8. $(a > b) \vdash (a \neg = b)$
9. $(a ? > b)(b = c) \vdash (a ? > c)$
10. $(a < b) \dashv\vdash (b > a)$
11. $(a \neg < b) \dashv\vdash (a > b) : (a = b)$
12. $(a ? < b) \dashv\vdash (b ? > a)$
13. $(a = b) \dashv\vdash (a \neg > b)(b \neg > a)$
14. $(a \neg = b) \dashv\vdash (a > b) : (b > a)$
15. $(a ? = b) \dashv\vdash (a ? > b)$

Аксиомы AII:

1. $\mathrm{Q}(a) \neg \mathrm{Q}(b) \vdash a(> \mathrm{Q})\, b$
2. $\neg \mathrm{Q}(a) \neg \mathrm{Q}(b) \vdash a(= \mathrm{Q})\, b$
3. $? \mathrm{Q}(a) ? \mathrm{Q}(b) \vdash a(= \mathrm{Q})\, b$
4. $\mathrm{Q}(a) ? \mathrm{Q}(b) \vdash a ?(> \mathrm{Q})\, b$
5. $? \mathrm{Q}(a) \neg \mathrm{Q}(b) \vdash a ?(> \mathrm{Q})\, b$

Классический случай S_1^r получается как обычно (исключаются неопределенности, внутреннее отрицание заменяется на внешнее и исключаются повторения).

§ 27. Отношения порядка

Выражение «упорядоченность (порядок) предметов» мы принимаем за первично ясное, ограничиваясь примерами и пояснениями. В частности, расположение предметов в пространстве и появление или исчезновение их во времени суть случаи упорядоченности. Для фиксирования ее употребляются выражения «первый», «второй», ..., «выше», «ниже», «раньше», «одновременно», «правее» и т. п.

Для некоторых предметов порядок считается данным (он ясен, не вызывает сомнений), для других устанавливается через первые. Причем порядок предметов исследователь определяет либо относительно самого себя, либо относительно какого-то другого предмета, выбранного для этой цели. Так, утверждая «a дальше b», утверждающий может иметь в виду то, что если какой-то предмет будет от него двигаться в направлении к a, то он пройдет мимо b; а утверждая «Москва южнее Ленинграда», утверждающий может иметь в виду то, что параллель Москвы ближе к экватору, чем параллель Ленинграда. Если исследователь определяет порядок двух предметов относительно третьего, отличного от самого исследователя, то все его знаки имеют смысл такой, как если бы исследователь находился на месте этого предмета.

Фиксирование порядка предметов относительно исследователя — дело ненадежное, субъективное. В случае же фиксирования порядка предметов относительно предмета, отличного от самого исследователя, дается возможность выбрать для этой цели удобные предметы (назовем их точками определения или отсчета порядка): устойчивые, более или менее широко принятые и стандартные, дающие возможность проверки соответствующих утверждений и исключающие двусмысленность и т. п.

При установлении порядка предметов важны не только точки определения порядка, но также и способы определения порядка. Мы можем, например, определить порядок точек a и b на окружности относительно третьей точки c. Но порядок a и b тем самым еще остается не заданным: потребуется еще указать, будем мы двигаться по часовой стрелке или против. В зависимости от направления движения мы получим разные результаты: в одном случае окажется, что a будет дальше b относительно c, а в другом — b дальше a. В дальнейшем мы будем употреблять выражение «способ отсчета (определения) порядка», полагая, что способ отсчета (или определения) порядка включает также и точку отсчета (определения) порядка.

Часто способ отсчета порядка не указывают, поскольку он общепринят, известен и т. п. Часто упорядоченность объектов смешивают с установлением отношений превосходства объектов по каким-то признакам (например, по воинским званиям). В случае с упорядоченностью объектов фиксируются сами эти объекты, а в качестве их признака указывается их порядок. Во втором же случае принимаются во внимание некоторые признаки объектов, эти признаки сравниваются, и на этой основе происходит упорядочивание объектов. Здесь средство упорядочивания (сравнение) бывает трудно отдифференцировать от его результата — от самого факта упорядоченности.

Высказывания о том, что a находится в отношении порядка R к b относительно способа установления порядка c, будем изображать символом

$$a\,(Rc)\,b.$$

Соответственно $a \urcorner (Rc)b$ и $a? (Rc)b$ суть его частное отрицание и неопределенная форма.

$D1$. Отношение порядка, фиксируемое высказыванием $a\alpha\,(Rc)b$, существует, если и только если существуют a и b, и при этом отношение между ними на самом деле таково, как говорится в $a\alpha\,(Rc)b$. Другими словами, признание существования отношения равносильно признанию истинности высказывания, которое его описывает.

В логике определяются свойства отношений «превосходит по порядку», «уступает по порядку», и «тождественно по порядку». При этом не предрешается, какое из отношений «раньше» и «позже» есть пример превосходства по порядку. Достаточно следующего: если одно из них приводится как пример для отношения «превосходит по порядку», то другое будет примером отношения «уступает по порядку». Аналогично для пар «ближе — дальше», «правее — левее» и т. п.

Предикаты «превосходит по порядку относительно c», «уступает по порядку относительно c» и «тождественно по порядку относительно c» будем изображать символами соответственно $(> c)$, $(< c)$ и $(=c)$.

Важное значение в науке имеют порядковые отношения предметов, обозначаемых терминами вида $\downarrow X$, где X есть высказывание, т. е. порядковые отношения событий или состояний. Пример высказываний о такого рода отношениях: «После того как прозвенел звонок, у собаки началось отделение слюны», «Вокруг проводника возникает магнитное поле в то время, когда по нему пропускают электрический ток» и т. п.

Установление отношений порядка для некоторых предметов проблемы не представляет (их порядок как-то дан, и споров на этот счет не возникает). Для других же случаев порядок устанавливается путем применения к указанным выше случаям правил логики, математики и специальных правил, выработанных в той или иной области науки применительно к особенностям изучаемых в ней предметов (например, теория относительности в физике).

§ 28. Логика порядка

Система S_2^r теории порядка получается благодаря таким дополнениям к ранее принятым системам.

Алфавит:

1) знаки $>$, $<$ и $=$, как в S_1^r;

2) R, R^1, R^2, ... — знаки порядка («раньше», «одновре-

менно», «через два часа», «за несколько дней до», «в десяти метрах от» и т. п.).

*D*1. Если c есть способ установления порядка, то $(> c)$, $(< c)$ и $(= c)$ суть предикаты порядка,

Опять-таки вместо символов $\alpha\,(Rc)\,(a,\ b)$ для наглядности будем употреблять символы вида $a\alpha\,(Rc)b$.

Аксиомы *A*I логики порядка имеют тот же вид, что и аксиомы *A*I логики сравнения, с той лишь разницей, что в них вместо предиката Q предполагается всюду обозначение способа установления порядка.

*D*2. Если R есть знак порядка, а X — высказывание, то $(R \downarrow X)$ есть предикат порядка.

Символы вида $(R \downarrow X)\ (\downarrow Y)$ будут читаться так: «$\downarrow Y$ имеет место в отношении R к $\downarrow X$». Например, «Событие $\downarrow Y$ наступило через час после $\downarrow X$», «$\downarrow Y$ имеет место в десяти километрах от $\downarrow X$» и т. п. В дальнейшем ради упрощения записи будем стрелки опускать и использовать вместо символов $\downarrow X$, $\downarrow Y$ и т. д. малые латинские буквы x, y, ...

Аксиомы *A*II:

1. $\sim (Rx)\,Y \dashv\vdash (Rx) \sim Y$
2. $(Rx)\,Y\,(Rx)\,Z \dashv\vdash (Rx)\,(YZ)$
3. $(Rx)\,Y \vee (Rx)\,Z \dashv\vdash (Rx)\,(Y \vee Z)$
4. $((R^1x)\,(R^2y))\,Z \dashv\vdash (R^1x)\,Z\,(R^2y)\,Z$
5. $((R^1x) \vee (R^2y))\,Z \dashv\vdash (R^1x)\,Z \vee (R^2y)\,Z$
6. $((Rx) \vee (Ry))\,Z \dashv\vdash (R\,(x \vee y))\,Z$
7. $((Rx)\,(Ry))\,Z \dashv\vdash (R\,(xy))\,Z$
8. $(R^1x)\,Y\,(aR^1b \rightarrow bR^2a) \vdash (R^2y)\,X$

В нашей логике порядка недоказуемы утверждения

$$a\alpha\,(Rc)\,b \vdash a\alpha\,(Rd)\,b, \quad \vdash a\alpha\,(Rc)\,b \rightarrow a\alpha\,(Rd)\,b,$$

поскольку (Rc) и (Rd) суть разные предикаты. И в этом смысле порядковое отношение предметов зависит от способа установления порядка. Но в логике порядка имеют силу общие законы логики, согласно которым доказуемо

$$\vdash \sim ((a\alpha\,(Rc)\,b)\,(a\beta\,(Rc)\,b)),$$

где α и β различны. Кроме того, само изменение способа установления порядка a и b не влияет на то, каким будет их порядок относительно каждого из способов c и d. Другими словами, если верно $a\alpha\,(Rc)b$, и мы заменим способ установления порядка c способом d, то из этого не следует, что $a\alpha$ $(Rc)b$ перестанет быть истинным. Короче говоря, значение истинности $a\alpha$ $(Rc)b$ не зависит от d, если d отличен от c. Мы считаем необходимым обратить особое внимание читателя на это обстоятельство потому, что нередко зависимость порядка предметов от способа установления порядка истолковывают не только как возможность неравнозначности $a\alpha$ $(Rc)b$ и $a\alpha$ $(Rd)b$ при различных c и d, но и как зависимость значения истинности $a\alpha$ $(Rc)b$ от смены c на d.

§ 29. Отношение «между»

Будем говорить, что объект a находится между объектами $b^1, \ldots, b^n$ $(n \geqslant 2)$ относительно способов установления порядка $c^1, \ldots, c^m$ $(m \geqslant 1)$, если и только если для любой пары b^i и b^k из $b^1, \ldots, b^n$ найдется такой c^j $(j = 1, \ldots, m)$, что либо $(a\ (> c^j)b^i)\ (b^k\ (> c^j)\ a)$, либо $(b^i\ (> c^j)a)$ $(a(> c^j)b^k)$.

§ 30. Производные порядковые термины

Мы выбрали в качестве первично ясных предикатов порядка предикаты из области значения предиката «один предмет превосходит по порядку другой относительно данного способа установления порядка» (короче говоря — предикат «превосходит по порядку»). Через них определяются такие производные предикаты порядка, как предикаты из области значения предикатов «уступает по порядку», «тождественно по порядку» и «находится между». Мы теперь рассмотрим, как вводятся в употребление порядковые субъекты и другие производные предикаты, употребление которых уместно в связи с порядковыми субъектами или должно быть определено для них специально. К порядковым субъектам мы относим термины «расстояние», «интервал», «место», «время», «момент», «объем» и т. п., а к производным предикатам — предикаты «непрерывный», «делимый», «конечный», «существует» и т. п.

§ 31. Структура

Рассмотрим подробнее понятие «структура», поскольку на нем удобно показать некоторые стороны формирования научной терминологии.

$D1$. Будем говорить, что объекты $a^1, \ldots, a^n$ $(n \geqslant 2)$ образуют структуру относительно способов установления порядка $c^1, \ldots, c^m$ $(m \geqslant 1)$, если и только если для каждого a^i $(i = 1, \ldots, n)$ найдется другой такой a^k $(k = 1, \ldots, n;\ i \neq k)$ и такой c^j $(j = 1, \ldots, m)$, что либо $a^i (> c^j) a^k$, либо $a^k (> c^j) a^i$ (т. е. либо a^i превосходит по порядку a^k относительно c^j, либо a^k превосходит a^i относительно того же c^j).

В другой форме $D1$ можно записать так. Пусть задан Ka и класс способов установления порядка Kc.

$D^1 1$. Элементы Ka образуют структуру относительно элементов Kc, если и только если

$$(\forall a^i)(\exists a^k)(\exists c^j)((a^i \in Ka)(a^k \in Ka)(c^j \in Kc)((a^i (> c^j) a^k) : \\ : (a^k (> c^j) a^i)))$$

В $D^1 1$ определяется выражение «объекты $a^1, \ldots, a^n$ образуют структуру относительно способов установления порядка $c^1, \ldots, c^m$», а не просто слово «структура». Обозначим это выражение буквой α. Смысл всех элементов определяемого выражения α известен до этого определения и независимо от него, кроме смысла слова «структура». Определяя выражение α, мы определяем тем самым и слово «структура». Определяемое выражение α по логической форме есть высказывание, и слово «структура» играет в нем роль субъекта (или части субъекта).

Однако мы еще не имеем права использовать слово «структура» как самостоятельный субъект, т. е. еще не можем ничего высказать о структуре как особом предмете. Для этого нужно осуществить еще ряд шагов в обработке терминологии по правилам логики.

Следующий шаг — образуем термин «Структура, которая образуется объектами $a^1, \ldots, a^n$ относительно способов установления порядка $c^1, \ldots, c^m$» из высказывания α. Обозначим этот термин буквой β. Этот термин образован с помощью логического оператора «который» из высказывания α. Для такого термина имеет силу логическое правило: если известен смысл α и свойства логического оператора «который», то известен смысл термина β. Термин β есть субъект в целом. Слово «структура» есть лишь часть этого термина. Это — своеобразный логический оператор для образования терминов.

Затем можно воспользоваться привычными сокращающими определениями такого вида. Принимается соглашение: «Структура A» будет сокращением (будет употребляться вместо) термина β. Или в другой форме: «Структура A»

будет термином, тождественным по значению термину β. Слово «структура» можно совсем исключить, приняв соглашение: A будет термином, тождественным по значению β.

Термины вида β и их сокращения образуют класс терминов, которые обозначают конкретные структуры, задаваемые путем указания предметов, образующих эти структуры, и способов установления их порядковых отношений, — первичные термины структур. Они образуют базу для введения обобщающих терминов «структура», «бинарная структура», «тернарная структура» и т. п.

При введении упомянутых обобщающих терминов возможны вариации. Например, можно ввести термин «структура», а затем путем соответствующих ограничений ввести термины «бинарная структура», «тернарная структура» и т. п.; но можно поступить и наоборот. Принципиально важно здесь другое: раз уже имеются названия для конкретных структур (имеется способ их введения), то получить прочие термины по правилам обобщения и ограничения уже не представляет труда. Так, термин «структура» может быть введен как общий (родовой) по отношению к терминам вида β (и их сокращениям). А по правилам ограничения можно теперь вводить термины вида «Структура, которая характеризуется тем, что X», где в X указывается какой-либо видовой признак.

$D2$. Объекты, указанные в β, суть элементы (или граничные точки) структуры β.

$D3$. Структура A есть подструктура структуры B, если и только если класс объектов, образующих A относительно $c^1, \ldots, c^m$, есть подкласс класса объектов, образующих В относительно тех же $c^1, \ldots, c^m$.

$D4$. Структура A включается в структуру B относительно $c^1, \ldots, c^m$, если и только если имеется такая подструктура C структуры B, что все элементы структуры A находятся между элементами структуры C относительно $c^1, \ldots, c^m$.

И только после того, как введены субъекты структур, о структурах можно нечто высказать как об особых объектах — можно их предицировать. Но это не означает, что можно неограниченно соединять эти субъекты с любыми предикатами, получая осмысленные высказывания. Если высказывания не вытекают из определений терминов, то условия приписывания порядковым терминам тех или иных предикатов еще должны быть строго установлены.

Существуют целые направления в науке, называемые структуралистскими (например, структурная лингвистика). Много говорят о «структурных методах», о «структурном подходе» и т. п. Конечно, понятие структуры так или иначе причастно ко всему этому. Но термин «структура» при этом фигурирует в самых разнообразных значениях, порой ничего общего не имеющих с тем, какие мы придали ему выше. Кроме того, в указанных научных направлениях и методологических разговорах о них вообще имеет место такая терминологическая неясность выражений, что было бы большой натяжкой ассоциировать их непременно с понятием структуры в нашем смысле и описывать их исключительно в понятиях логики. Ни в какой мере не посягая на новизну структуралистских направлений с точки зрения истории соответствующих конкретных наук, мы, однако, должны заметить, что наука с самого начала своего существования так или иначе фиксировала пространственно-временные структуры изучаемых объектов.

§ 32. Упорядоченные конъюнкции и дизъюнкции

Встречаются высказывания вида «X и затем Y», «X и перед этим Y», «X и слева от этого Y» и т. п. Эти своеобразные упорядоченные конъюнкции нередко употребляются неявно и смешиваются с обычными. Аналогично обстоит дело с упорядоченными дизъюнкциями. Именно на этом смешении базируется, на наш взгляд, исключение некоторых законов классической логики в «логике микромира». В общем случае упомянутые конъюнкции и дизъюнкции имеют вид

$$X\,(Rx)\,Y \quad \text{и} \quad X \vee (Rx)\,Y,$$

где R есть какое-то отношение порядка («X и в отношении R к этому Y», «X или в отношении R к этому Y»).

Для рассматриваемых высказываний не имеют силы правила

$$X\,(Rx)\,Y \vdash Y\,(Ry)\,X$$
$$X \vee (Rx)\,Y \vdash Y \vee (Ry)\,X$$

Для рассматриваемых высказываний будут иметь силу лишь утверждения вида:

$A1.$ $(X\,(R^1x)\,Y)\,(aR^1b \to bR^2a) \vdash Y\,(R^2y)\,X$

$A2.$ $(X \vee (R^1x)\,Y)\,(aR^1b \to bR^2a) \vdash (Y \vee (R^2y)\,X.$

В остальном для упорядоченных конъюнкций и дизъюнкций имеют силу правила, аналогичные обычным.

Обычные (коммутативные) конъюнкцию и дизъюнкцию можно рассматривать как частный случай упорядоченных, приняв аксиомы:

$$A3.\ (XY) \dashv\vdash ((X\,(Rx)\,Y) \leftrightarrow (Y\,(Ry)\,X))$$
$$A4.\ (X \vee Y) \dashv\vdash ((X \vee (Rx)\,Y) \leftrightarrow (Y \vee (Ry)\,X))$$

§ 33. Физическое следование

Условные высказывания вида

$$X\alpha \rightarrow (Rx)\,Y,$$

где X и Y суть локальные высказывания об эмпирических объектах, будем называть высказываниями об эмпирическом (или физическом) следовании. Пример высказываний такого рода: «Если по проводнику пропустить электрический ток, то одновременно с этим (или сразу после этого) вокруг проводника возникает магнитное поле».

Для высказываний о физическом следовании имеет силу утверждение:

$T1$. Для любого Z, если из Z логически не следует $(Rx)Y$ и не следует $X \rightarrow (Rx)Y$, то из XZ логически не следует $(Rx)Y$.

Таким образом, получить высказывания $X \rightarrow (Rx)Y$ из каких-то дедуктивных отношений X и Y невозможно. Они получаются как первичные соглашения (постулаты, аксиомы) по правилам логики из других высказываний того же рода и (это — их главный источник) из наблюдений. В последнем случае они получаются по такой схеме: 1) наблюдается $\downarrow X$ и в отношении R к нему $\downarrow Y$; 2) указанное в пункте 1 имеет место каждый раз (т. е. для всех $\downarrow$X) при данных условиях V; 3) результат сокращается в высказывании $X \rightarrow (Rx)Y$, которое считается истинным при условиях V.

Но когда именно исследователь имеет право сказать «каждый раз», «для всех»? Указать здесь всеобщие рекомендации, подобные правилам логического следования, невозможно. Утверждая это, мы не столько учитываем печальный опыт истории логики на этот счет, сколько самую суть дела: принудительная сила правил логического следования есть принудительная сила соглашений людей относительно свойств логических операторов и содержащих их структур высказываний; в рассматриваемом же случае приходится иметь дело с отражением мира, который не зависит от конвенции.

Прежде всего надо сказать, что в познании существенную роль играет удача. В мире встречаются случаи, когда $\downarrow Y$ существует в отношении R к $\downarrow X$ при любых условиях. И если исследователь после нескольких наблюдений принимает $X \rightarrow (Rx)Y$, последнее становится элементом научных знаний, несмотря на отсутствие каких бы то ни было логических оснований для этого. Встречаются, далее, случаи, когда $\downarrow Y$ существует в отношении R к $\downarrow X$ всегда при определенных условиях. А условия эти всегда даны в опыте исследователя (например, существование Земли, поля тяготения, воздуха и т. п.). Причем роли не играет, известны они исследователю или нет. Судьба $X \rightarrow (Rx)Y$ в таких случаях аналогична тому, что говорилось выше.

Имеются, далее, некоторые эвристические принципы, которые в практическом исполнении дают иногда положительный эффект, иногда нет. К их числу относятся известные индуктивные методы Бэкона — Милля. Поскольку эти эвристические принципы хотя бы иногда дают возможность получить истинные высказывания, их применение вполне оправданно. Что же касается ошибок, то занятие наукой стало бы самым заурядным делом, если бы ученые их не делали.

Возьмем такой пример. Пусть в некоторой пространственно-временной области сначала осуществляется $\downarrow X$, а затем — $\downarrow Y$. Если при этом все остальное в ограниченной нами области остается неизменным, то мы вправе принять $X \rightarrow (Rx)Y$, где (Rx) есть «вслед за этим». В практическом же исполнении этого принципа постоянство «всего остального» — дело немыслимое, и судьба нашего высказывания зависит от того, насколько остающееся на самом деле неизменным близко ко «всему остальному».

Дедуктивные свойства высказываний о физическом следовании определяются такой системой аксиом.

Аксиомы AI:

1. $(X \rightarrow (Rx)\,Y) \dashv\vdash (\forall \downarrow X)\,((Rx)\,Y)$
2. $(X \rightarrow (Rx)\,Y) \dashv\vdash N \downarrow ((Rx)\,Y)$
3. $(X \urcorner\!\rightarrow (Rx)\,Y) \dashv\vdash (\urcorner \forall \downarrow X)\,((Rx)\,Y)$
4. $(X \urcorner\!\rightarrow (Rx)\,Y\,) \dashv\vdash (M \downarrow ((Rx) \sim Y)$

Аксиомы AII:

1. $(X \to (R^1x)\, Y)\, (aR^1b \to bR^2a) \vdash (\sim Y \to (R^2 \sim y) \sim X)$
2. $(X \to (R^1x)\, Y)\, (Y \to (R^2y)\, Z)\, ((aR^1b)\, (bR^2c) \to$
$\to (aR^3c)) \vdash (X \to (R^3x)\, Z)$
3. $(X \to (Rx)\, Y)\, (Y \to Z) \vdash (X \to (Rx)\, Z)$
4. $(X \to (Rx)\, (YZ)) \dashv\vdash (X \to (Rx)\, Y)\, (X \to (Rx)\, Z)$
5. $(X \to (Rx)\, (Y \vee Z)) \dashv\vdash (X \to (Rx)\, Y) \vee (X \to (Rx)\, Z)$
6. $(X \vee Y \to ((R^1x) \vee (R^2y))\, Z) \dashv\vdash (X \to (R^1x)\, Z) \vee$
$\vee (Y \to (R^2y)\, Z)$
7. $(X \to (R^1x)\, Y)\, (X \to (R^2x)\, Z)\, ((aR^1b)\, (aR^2c) \to (aR^3\,(b, c))) \vdash$
$\vdash (X \to (R^3x)\, (YZ))$

Аксиома $AIII$ (см. стр. 219):

$((\neg x \Rightarrow x) \to (R\, (\neg x \Rightarrow x))\, (\neg y \Rightarrow y)) \vdash (X \to (Rx)\, Y)$

§ 34. Физическое следование и функции

Для высказываний A

$$X^i \to (Rx^i)\, Y^i$$

может быть найдено высказывание B

$$\downarrow (Rx)\, Y \Leftarrow f\,(\downarrow X)$$

такое, что $\downarrow X^i \in K \downarrow X$, $\downarrow Y^i \in K \downarrow Y$ и $\downarrow Y \Leftarrow f\,(\downarrow X)$. Высказывание B по построению обладает тем свойством, что

$$B \cdot X^i \vdash (Rx^i)\, Y^i$$

Причем заключение здесь может быть проверено (и получено) также и независимо от посылок.

Функции двузначной и многозначной пропозициональной логики можно интерпретировать как частный случай функций рассмотренного выше типа (скажем, эмпирических функций). Эти функции обладают такими свойствами: задается некоторый класс объектов и класс признаков, которые могут быть им присущи; каждый объект такого рода обязательно имеет какой-то из этих признаков, но в данное время — только один из них (признаки исключают друг друга). Пропозициональные переменные логики интерпретируются как объекты такого рода, их значения — как возможные признаки этих объектов, пропозициональные функции — как эмпирические зависимости состояний одних объектов от состояний других объектов. Знак R опускается, поскольку предполагается одновременность или последовательность событий.

§ 35. Эмпирические связи

$D1$. Будем говорить, что $\downarrow X$ и $\downarrow Y$, фигурирующие в $X \rightarrow (Rx)Y$ и $\downarrow (Rx)Y \Leftarrow f(\downarrow X)$, находятся в эмпирической связи (или образуют эмпирическую связь). Будем также говорить, что $\downarrow X$ находится в эмпирической связи с $\downarrow Y$ (и $\downarrow Y$ с $\downarrow X$). Аналогичный смысл будут иметь выражения, в которых вместо $\downarrow X$ и $\downarrow Y$ фигурируют лишь s^1 и s^2, входящие в них. Характер связи событий $\downarrow X$ и $\downarrow Y$ задается знаками R и f, а характер связи объектов s^1 и s^2 определяется кроме этого еще остальными частями X и Y. События $\downarrow X$ и $\downarrow Y$ (объекты s^1 и s^2) суть элементы связи.

$D2$. Пусть $Z^1, \ldots, Z^n$ $(n \geqslant 1)$ таковы, что

$$(X \rightarrow (R^1x)\,Z^1)\,(Z^1 \rightarrow (R^2z^1)\,Z^2) \ldots (Z^n \rightarrow (R^kz^n)\,Y) \rightarrow \\ \rightarrow (X \rightarrow (Rx)\,Y)$$

Будем в таком случае употреблять выражение «механизм связи $\downarrow X$ и $\downarrow Y$». Ответом на вопрос о том, каков механизм связи $\downarrow X$ и $\downarrow Y$ (соответственно s^1 и s^2), является антецедент только что приведенного высказывания.

$D3$. Множество событий $\downarrow X^1, \ldots, \downarrow X^n$ (объектов $s^1, \ldots, s^n$) образует эмпирическую систему связей, если и только если для каждого $\downarrow X^i$ (s^i) из этого множества найдется по крайней мере одно такое $\downarrow X^k$ (один такой s^k) из того же множества событий (объектов), которое (который) находится с ним в эмпирической связи. Связи, образующие данную систему, суть ее элементы.

Те эмпирические системы связей, которые фактически исследуются в науках, характеризуются более узким понятием изолированной эмпирической системы связей (для краткости будем говорить об изолированной системе). При этом имеется в виду следующее: в некоторой пространственно-временной области задается некоторое множество событий (объектов), и рассматривается система только из этих событий (объектов), т. е. все прочие события (объекты) во внимание не принимаются; если же какие-то из прочих событий (объектов) принимаются во внимание, то тем самым рассматривается расширенная (сравнительно с исходной) система, но так или иначе изолированная. И это вполне естественно, ибо «нельзя объять необъятное». Отдельные связи теперь рассматриваются как элементы изолированных систем. Для всех элементов системы предполагаются одни и те же условия самой системы.

*D*4. Связь является непосредственной, если для нее нельзя (в данной системе, разумеется) указать другие связи данной системы, образующие ее механизм, и косвенной, если это возможно.

*D*5. Связь является простой, если не может быть представлена как система из двух или более различных связей, и сложной в противном случае.

Связь не есть структура. Это — лишь способность некоторой области мира образовывать структуру.

§ 36. Условия

Термин «условия» неоднозначен. Иногда условиями события $\downarrow X$ называют окружающую его среду, предшествующие события, причины и т. п. Иногда условиями называют антецеденты условных высказываний. Так обстоит дело с определением необходимых и достаточных условий.

*D*1. $\downarrow X$ есть необходимое условие $\downarrow Y$, если и только если $\sim X \to \sim Y$.

*D*2. $\downarrow X^1, \ldots, \downarrow X^n$ $(n \geqslant 1)$ суть достаточные условия $\downarrow Y$, если и только если $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n \to Y$.

Термин «условия» употребляется также в смысле, не предполагающем никаких логических и эмпирических связей. В этом случае указание условий образует особый элемент в структуре высказываний, имеющий существенное значение при операциях с ними. Например, возьмем высказывания (1) «X при условии V» и (2) «Y при условии W». Независимо от того, имеется связь X и V (также Y и W), ссылка на V и W не дает нам права из чисто логических соображений от истинности (1) и (2) заключить об истинности «XY при условии V», «XY при условии W» и «XY при условии VW», поскольку как X и Y, так и их условия V и W могут оказаться несовместимыми, а совмещение V и W может привести к тому, что X или Y (или оба) окажется ложным. Рассмотрим это обстоятельство подробнее на примере парадоксов связей.

§ 37. Парадоксы связей

Встречаются высказывания об эмпирических связях

$$(1)\ X \to (Ra)\,Z$$
$$(2)\ Y \to (Ra)V,$$

которые на первый взгляд обладают следующим свойством. По правилам логики из них получается

$$(3) XY \to (Ra)\,(ZV),$$

но при этом высказывание XY может быть истинным, а ZV нет, т. е. истинно $\sim (ZV)$. Например, (1) есть «Если к телу A приложить силу B, то A сдвинется в направлении α на расстояние β», а (2) есть «Если к телу A приложить силу C, то A сдвинется в направлении γ на расстояние δ»; к телу A можно приложить одновременно силу B и силу C; но одновременно сдвинуться в направлении α и γ (например, вправо и влево) тело не может. Сложившаяся ситуация воспринимается как парадоксальная (один из вариантов парадоксов связей).

Ничего парадоксального, однако, в рассмотренной ситуации не останется, если восстановить достаточно полную логическую ее картину. На самом деле в формулировке (1), (2) и (3) опущено указание на условия, при которых они принимаются как истинные. Причем эти условия различны. Пусть V^1 суть условия для (1), V^2 — условия для (2), V^3 — условия для (3). Условия V^1 могут включать в себя $\sim Y$ или такое Z, из которого следует $\sim Y$, т. е. $V^1 \to \sim Y$. Условия V^2 могут предполагать $\sim X$, т. е. $V^2 \to \sim X$. Например, V^1 предполагает, что к A не прилагается сила C; V^2 предполагает, что к A не прилагается сила B. Возьмем простейший случай: V^1 есть $V^3 \cdot \sim Y$; V^2 есть $V^3 \cdot \sim X$. Наличие V^3 во всех трех V^1, V^2 и V^3 необходимо для того, чтобы было возможно рассуждение. В таком случае мы имеем:

$$(1)\ X \sim Y \to (Ra)\,Z$$
$$(2)\ \sim XY \to (Ra)\,V$$
$$(3)\ X \sim Y \sim XY \to (Ra)\,(ZV)$$

(при условии V^3 для всех трех). Но $X \sim Y \sim XY$ есть противоречие, и парадоксальность (3) исчезает. Теперь, чтобы установить, какое следствие будет вытекать из XY (в частности, какое положение займет тело A, если к нему сразу приложить силы B и C), необходимо либо дополнительное эмпирическое исследование, дающее

$$(4)\quad XY \to (Ra)\, W,$$

либо особое правило оперирования с Z и V, позволяющее дедуктивно получить W (например, правило параллелограмма сил).

Часто условия, при которых принимаются (1) и (2), формулируются так, что создается иллюзия тождества их. Например, (1) придают вид «Если X, то при прочих постоянных условиях $(Ra)Z$», а (2) — «Если Y, то при прочих постоянных условиях $(Ra)V$». В обоих случаях условия записаны одним и тем же выражением «при прочих постоянных условиях», хотя они различны хотя бы уже потому, что в случае (1) предполагается $\sim Y$, а в случае (2) — $\sim X$.

Разрешением парадоксальности рассматриваемой ситуации является употребление особого рода предикатов, которые содержат в себе неявное указание на условия. Это делается, в частности, посредством выражения «тенденция» (потому назовем такие предикаты предикатами тенденций). Например, вместо выражения «Если к телу A приложить силу B, то A сдвинется в направлении α на расстояние β (при условии, что никакие другие силы не действуют на A)» употребляется более краткое «Если к телу A приложить силу B, то A будет иметь тенденцию двигаться в направлении α на расстояние β». В этом случае какие бы силы ни действовали на A и куда бы оно ни сдвинулось, наше высказывание будет фиксировать не фактическое положение дел, а долю участия силы B в нем. При этом наши высказывания примут вид

$$(1)\quad X \to (Ra)\, Z^*$$
$$(2)\quad Y \to (Ra)\, V^*,$$

где в Z^* и V^* говорится не о реальных ситуациях (положениях), а о тенденциях. В таком случае будет верно

$$(3)\quad XY \to (Ra)\,(Z^*V^*),$$

поскольку Z^*V^* не есть противоречие. Наличие противоположных тенденций не есть логическое противоречие. Как реализуются тенденции Z^* и V^* совместно, должен установить опять-таки опыт или специально выработанное на основе опыта правило.

Аналогичная картина имеет место тогда, когда опускают различие условий в случае

$$(1)\ X \to (Ra)\, Y$$
$$(2)\ X \to (Ra)\, Z$$

По правилам логики из (1) и (2) получается

$$(3)\ X \to (Ra)\, (YZ),$$

где Y и Z несовместимы, т. е. $\sim (YZ)$. В простейшем виде решение этой ситуации выглядит так. Из высказываний

$$X \to (Rc)\, V$$
$$V \to (Rd)\, Y$$

получается при условии $\sim W$

$$(1)\ X \to (Ra)\, Y,$$

а из высказываний

$$X \to (Rc)\, W$$
$$W \to (Rd)\, Z$$

получается при условии $\sim V$

$$(2)\ X \to (Ra)\, Z.$$

Если учесть различие условий или ввести предикаты тенденций, то парадоксальность устраняется, ибо одно событие может вести к противоположным тенденциям. Результат взаимодействия последних устанавливается опытным путем.

§ 38. Логический анализ языка

Логика науки не ограничивается описанием возможных структур из логических операторов, терминов и высказываний и определением их свойств. Она вправе исследовать любые явления языка науки, если для описания этих явлений необходимо или даже только возможно использовать средства логики. При этом вовсе не обязательно, чтобы свойства этих явлений полностью определялись в логике.

Возьмем предложения:

(1) «N предполагал, что X»

(2) «N знал, что X»,

где N есть имя какого-то человека, а X есть какое-то высказывание. Например, (1) есть «N предполагал, что атом неделим», а (2) есть «N знал, что атом неделим». Лингвистически (1) и (2) однотипны. Однако они различаются вот в каком плане. Истинность первого не зависит от того, истинно или ложно X. Для второго же имеет силу такая зависимость: если истинно (2), то истинно X; если ложно (неистинно) X, то ложно (2). Второе, таким образом, равнозначно конъюнкции «$X \cdot (2)$». Так что высказывание «N знал, что атом неделим» ложно, поскольку ложно высказывание «Атом неделим».

Указанные различия предложений (1) и (2) описываются с помощью понятий логики («истинно», «ложно» и т. п.). Но они не связаны ни с какими логическими операторами. В самом деле, свойства операторов определяются для любых терминов и высказываний, т. е. независимо от их конкретного смысла. В данном же случае различия предложений (1) и (2) связаны с различиями терминов «предполагал» и «знал» по значению, а не по логической структуре (они оба суть простые термины). В этом легко убедиться, взяв предложения «Снег бел, что X» и «N курил, что X», которые явно бессмысленны.

Язык науки содержит большое число выражений такого рода, которые поддаются по крайней мере частичному анализу в рамках логики. К ним относятся, в частности, нормативные предикаты.

§ 39. Нормативные предикаты

Нормативные высказывания суть высказывания вида «N разрешено A», «N обязан A», «Все N обязаны A» и т. п., где A есть название действия («курить», «сдавать зачет», «гулять» и т. п.), а N — название лиц, способных осуществлять или не осуществлять действие A. Поскольку из контекста или из ситуации бывает ясно, кому запрещено, разрешено и т. п. действие A, то нормативным высказываниям придают вид «A разрешено», «A обязательно» и т. п. В такой форме удобнее исследовать свойства этих высказываний, но логически исходной формой их является такая, как указано в самом начале параграфа.

Логический анализ нормативных высказываний есть анализ выражений вида «разрешено», «обязательно», «запрещено» и т. п. Он может быть осуществлен лишь при том условии, что эти выражения рассматриваются как части высказываний вполне определенного вида, а именно как предикаты высказываний «A разрешено», «A запрещено» и т. п., где A есть название действия (а не любой субъект), или как части сложных предикатов «разрешено A», «запрещено A» и т. п. в высказываниях, где субъекты суть названия лиц, совершающих действия.

Логический анализ нормативных высказываний, далее, имеет два аспекта:

1) установление значения (смысла) нормативных предикатов самих по себе (ответы на вопросы типа «Что означает запрещение действия?»);

2) установление взаимоотношений этих предикатов.

Различие и известная независимость этих аспектов видна хотя бы из того, что почти все нормальные люди так или иначе знакомы со значением слов «запрещено», «нельзя», «обязательно» и т. п., но лишь очень немногие имеют представление о том, что (например) предикаты «обязательно» и «разрешено» определимы друг через друга.

Значение нормативных предикатов устанавливается по такой схеме: если N осуществит (не осуществит) действие A, то его постигнет (не постигнет) какое-то наказание или ожидает какое-то поощрение. Вид наказания или поощрения в ряде случаев точно указывается или остается более или менее неопределенным. Таким образом, если α есть какой-то нормативный предикат («разрешено», «запрещено» и т. п.), то высказывание «$N\alpha A$» тождественно по смыслу высказыванию «Если N осуществит (не осуществит) A, то X», где X есть высказывание о наказании или поощрении N (или о том, что не будет ни того, ни другого). Нормативные высказывания здесь сводятся к условным.

Указанное сведение нормативных высказываний есть лишь логическая схема, но не логическое правило, поскольку X может быть построено в различной терминологии и всегда в конкретной терминологии. Взаимоотношения же нормативных предикатов (по крайней мере некоторые) вполне описываются как правила логики.

Примем обозначения:

1) P — «разрешено»;

2) O — «обязательно»;

3) $З$ — «запрещено»;

4) $Б$ — «безразлично»;

5) a, b, $\tilde{a}$, $\tilde{b}$,... — названия действий.

Соотношение a и $\tilde{a}$ таково: если a означает осуществление действия («курить», «пить» и т. п.), то $\tilde{a}$ означает его неосуществление («не курить», «не пить» и т. п.). Для $\tilde{\tilde{a}}$ имеет силу правило: $\tilde{\tilde{a}} \rightleftharpoons a$.

Соотношения приведенных нормативных предикатов определяются утверждениями (ограничимся лишь классическим случаем):

$$1.\ O(a) \dashv\vdash \sim P(\tilde{a})$$
$$2.\ З(a) \dashv\vdash \sim P(a)$$
$$3.\ Б(a) \dashv\vdash P(a)\,P(\tilde{a})$$

Как видим, предикаты $З$ и $Б$ сводятся к P, а последний взаимозаменим с O. Кроме того, для предикатов O и P имеют силу утверждения:

$$4.\ O(a) \vdash P(a)$$
$$5.\ \sim P(a) \vdash \sim O(a)$$

Таким образом, предикаты O и P являются логически сопряженными, причем первый категорически сильнее второго.

§ 40. Индивид

Выше мы употребляли выражения «индивид» и «индивидуальный термин». Из их определений получаются следствия, имеющие (как и их определение) чисто логическую природу. Например:

1. Если a есть индивидуальный термин и «a существует», истинно, то невозможен (и не существует) другой индивид a.

2. Множество индивидов есть индивид. Если мир есть множество индивидуальных событий, то мир есть индивид.

Однако свойства рассматриваемых выражений этим не исчерпываются. В частности, возможно принять утверждение: «Если a и b суть индивиды, то $(\exists P)\ (P(a)\ \neg P(b) : : P(b)\ \neg P(a))$» (т. е. два индивида различаются по крайней мере одним признаком). Не исключена возможность, что, уточнив выражения «сходство», «различие» и т. п. на языке логики, мы получим это утверждение (и другие аналогичные) как следствие. Но несомненно то, что возможно построить логически строгую теорию индивидов, подобно тому как построены теории отношений, классов, модальностей. Отдельные положения, относящиеся к индивидам, формулируются в других разделах логики. Так, вырожденный случай полной примитивной индукции имеет такой вид: если a есть индивид, и X истинно, то $(\forall a)\ X$. По нашему мнению, исследование логических терминов в языке науки во многом (если не в основном) есть дело будущего.

Глава шестая

МЕТОДОЛОГИЯ НАУКИ

В этой главе, не претендуя на систематичность и полноту, мы рассмотрим некоторые проблемы методологии науки с той точки зрения, с какой они могут быть предметом внимания логики. Те критические соображения, которые при этом будут высказаны, относятся не к самой идее разработки методологии науки на базе логики, а лишь к той или иной конкретной форме реализации этой идеи.

§ 1. Эмпирические и абстрактные объекты

*Д*1. Объекты, которые отражаются исследователем посредством его природного (чувственного) аппарата отражения (которые воздействуют на этот аппарат — ощущаются, воспринимаются, наблюдаются и т. п. исследователем), будем называть реальными эмпирическими объектами. Вопрос о существовании таких объектов решается (в конце концов) в зависимости от возможности их наблюдения (данным исследователем или другими исследователями, свидетельствам которых он доверяет). Если на основе каких-то имеющихся данных исследователь судит о существовании какого-то объекта в прошлом или в местах, в которых он не может осуществлять наблюдение, то неявно принимается допущение: если бы исследователь смог переместиться в пространстве или во времени в соответствующее положение относительно этого объекта, то последний был бы доступен наблюдению.

Реальные эмпирические объекты не вечны, изменчивы, существуют в определенной среде, в определенной области пространства и в определенное время, являются следствиями каких-то причин и сами порождают какие-то следствия, обладают бесконечным числом различных признаков и т. п. Высказывания о них могут иметь различные значения истинности в зависимости от времени и области пространства.

*D*2. Гипотетические эмпирические объекты суть объекты, которые характеризуются следующими чертами. Сами по себе они не наблюдаются, наблюдаются последствия их воздействия на другие наблюдаемые объекты. Существование этих объектов допускается для каких-то определенных целей. Эти объекты (как и реальные) принимаются как возникающие и исчезающие, как изменчивые и т. п. Основные принципы их допущения:

1) логическая непротиворечивость высказываний о них, отсутствие противоречий между этими высказываниями и признанными положениями данной науки;

2) разрешимость проблемы, ради исследования которой они принимаются. Пример гипотетических эмпирических объектов — микрочастицы в физике. Возможно различать уровни или степени таких объектов.

Исследователь может принять решение в некотором акте познания не принимать во внимание некоторые признаки объектов (исключающе-негативная абстракция) или принимать во внимание только некоторые определенные признаки объектов (выделяюще-позитивная абстракция). Это решение может быть реализовано в отдельных случаях путем выбора предметной области, в которой исследуемые объекты действительно не обладают указанными признаками, или путем искусственного создания ее. И в этих случаях исследуемые объекты остаются эмпирическими, взятыми лишь в определенных условиях наблюдения.

Иначе будет обстоять дело, если принимается решение отвлечься от таких признаков объектов, без которых эмпирические объекты вообще или объекты данной области исследования в частности не могут существовать. Аналогично при выделяющей абстракции, поскольку решение рассматривать только какие-то признаки означает решение не рассматривать прочие. Например, исследователь решает не принимать во внимание размеры и форму физических тел при рассмотрении их движения, считая, что эти тела не имеют пространственных размеров (суть «материальные точки»).

Реализацией этого решения является допущение особых объектов, которые называются абстрактными (или идеальными). Эти объекты не существуют эмпирически по самому характеру их допущения. И исследование их уже не будет процессом наблюдения.

Абстрактные объекты вводятся в науку следующим образом. Исходные (или первичные) абстрактные объекты вводятся путем обычных определений с дополнениями относительно исключения признаков, о которых говорилось выше. Суть этих определений можно представить схемами.

Схема I. Принимается определение: термином s будет называться объект, который имеет признаки $P^1, \dots P^n$ $(n \geqslant 1)$ и не имеет признаков $Q^1, \dots, Q^m$ $(m \geqslant 1)$. При этом признаки Q^i таковы, что эмпирический объект (вообще или в данной предметной области) без них не существует. Если некоторый эмпирический объект имеет признаки P^j, то он имеет и признаки Q^i; если он не имеет какого-то признака из Q^i, то он не имеет и признаков P^j.

Схема II. Принимается определение: термином s будет называться объект, который имеет признаки $P^1, \dots, P^n$, и если из этого соглашения и других принятых в данной науке утверждений не следует, что s имеет признак Q^i, то s не имеет этого признака. При этом Q^i есть необходимый признак эмпирических объектов, т. е. если некоторый эмпирический объект имеет признаки P^j, то он обязательно имеет и признак Q^i. В данном случае объекту s приписываются только определенные признаки P^j и признаки, принадлежность которых объекту вытекает логически из принятых утверждений и определений. Этому определению точно так же можно придать вид системы аксиом, определяющей s как первичный термин.

*D*3. Объекты, обозначаемые терминами, введенными по схемам I и II, называются исходными абстрактными объектами. В определения терминов исходных абстрактных объектов не входят другие термины абстрактных объектов, кроме вновь вводимых терминов.

*D*4. Исходный абстрактный объект существует, если и только если соблюдены правила определения при введении его термина, и из определения его термина и других определений и утверждений данной науки не следует логическое противоречие при условии, что эти другие определения и утверждения непротиворечивы.

*T*1. Из определений следует: исходный абстрактный объект либо существует, либо не существует, а неопределенность исключается.

Поскольку определения исходных абстрактных объектов в принципе стремятся сделать такими, чтобы выполнялись правила логики, то эти объекты всегда предполагаются существующими (точки, линии, числа и т. п. считаются данными).

*D*5. Производные абстрактные объекты суть объекты, термины которых определяются через термины исходных абстрактных объектов.

*T*2. Вопрос о существовании производных абстрактных объектов решается посредством рассуждений, т. е. посредством вывода соответствующих утверждений или их отрицаний из определений исходных абстрактных объектов или установления невозможности построить такие выводы. Здесь возможны по крайней мере три исхода: доказательство существования, доказательство несуществования и установление неразрешимости проблемы существования.

*T*3. Признаки производных абстрактных объектов выясняются также посредством рассуждений. И здесь возможны три исхода.

*D*6. Исходные и производные абстрактные объекты суть абстрактные объекты.

*T*4. Высказывания об абстрактных объектах универсальны.

Если a есть термин абстрактного объекта, а b — эмпирического, то $\sim (a \rightarrow b)$ и $\sim (b \rightarrow a)$. Отношения терминов абстрактных и эмпирических объектов устанавливаются иначе, а именно посредством операции, называемой интерпретацией.

*D*7. Интерпретация абстрактного объекта s^1 заключается в следующем:

1) абстрактному объекту s^1 ставится в соответствие объект s^2 (в частности, эмпирический);

2) s^2 подбирается с таким расчетом, чтобы для любого X выполнялось утверждение $X \rightarrow X\ (s^1/s^2)$.

*D*8. Абстрактный объект, имеющий интерпретацию, называется реальным абстрактным объектом, а не имеющий таковой — гипотетическим. Цель введения последних — интересы дедукции.

Совокупность определений и утверждений, содержащих термины абстрактных объектов, образует исчисление. В настоящее время с понятием «исчисление» ассоциируют также введение специальной символики, установление точного перечня правил вывода и т. д. Но это уже касается технического совершенства исчислений.

Поскольку термины абстрактных объектов не имеют эмпирических двойников, то сами эти термины начинают рассматривать как исследуемые объекты. И в этом есть резон, ибо все определения и утверждения касаются смысла этих терминов. При таком понимании исчисления принимают характер формальных систем, а правила рассуждения выступают как операции с этими объектами. Этот шаг терминологически упрощает изложение, но вместе с тем он делает еще менее заметной связь с эмпирической основой.

§ 2. Эмпирические и точные науки

Абстрактные объекты изобретаются как средство для исследования эмпирических объектов. Однако в силу разделения труда в науке изобретение и исследование их обособляется от исследования эмпирических объектов в форме развития особых наук, часто называемых точными или дедуктивными. Интересы и потребности точных наук служили основным стимулом развития логики и в подавляющей степени определили ее содержание.

Существует огромная литература, посвященная так называемым «проблемам логики и методологии дедуктивных (или точных) наук». Содержание этой литературы общеизвестно: теория дедукции (логического следования, вывода), теория доказательства, аксиоматический метод и другие связанные с ними вопросы логики.

Заметим, что нельзя проблематику логики абсолютно строго разделить на проблемы, относящиеся к опытным наукам, и проблемы, относящиеся к точным наукам. Однако опытное исследование (исследование эмпирических объектов) имеет ряд особенностей (сравнительно с абстрактными объектами), которые фиксируются в определенной системе понятий и утверждений логики. И в этой главе мы в основном будем рассматривать вопросы, представляющие преимущественный интерес для опытных наук.

§ 3. Варьирование признаков и диапазон истинности

$D1$. Признаки, обозначаемые предикатами $P^1, \ldots, P^n$ ($n \geqslant 2$), суть варианты признака, обозначаемого предикатом P, если и только если

$$P \rightarrow P^1, \ldots, P \rightarrow P^n,$$

и для любого объекта s

$$\sim ((s \leftarrow P^i)(s \leftarrow P^k)),$$

где P^i и P^k есть любая пара из $P^1, \ldots, P^n$. Например, признаки «движется со скоростью a^1» и «движется со скоростью a^2» суть варианты признака «движется», если $a^1 \neq a^2$.

$D2$. Множество признаков, удовлетворяющих $D1$, образует область варьирования данного признака. Один и тот же признак может иметь две и более различные области варьирования. Так, вариантами признака «двигаться» являются признаки «двигаться влево» и «двигаться вправо», относящиеся к другой области варьирования, чем признаки «двигаться со скоростью a^1» и «двигаться со скоростью a^2».

Термины вариантов признака P образуются по такой схеме:

1) имеются такие предметы $a^1, a^2, \ldots$, присоединение которых к P дает термины вида Pa^i, обозначающие варианты P;

2) если по соглашению $P^2 \rightleftharpoons P^1a^i$, то термин P^2 есть термин варианта P.

Возможны случаи, когда два различных термина P^1 и P^2 обозначают один и тот же признак так, что высказывания $s \leftarrow P^1$ и $s \leftarrow P^2$ оба истинны, но P^1 и P^2 несравнимы по значению.

$D3$. Множество всевозможных $s \leftarrow P^i$ ($i \geqslant 1$), которые считаются истинными в отношении одного и того же объекта $s \downarrow P$, образуют диапазон истинности высказываний об этом объекте.

В этом случае признак P выступает как вариант двух или более различных признаков $P^1, P^2, \ldots$. Например, высказывания «Частица движется со скоростью a» и «Частица движется со скоростью b» могут оба считаться истинными в отношении к наблюдаемой движущейся частице, хотя $a \neq b$. Чаще всего диапазон истинности задается отношением величин (например, заданы такие величины a и b, что если $a \leqslant a^i \leqslant b$, то $s \leftarrow Pa^i$ считается истинным).

Диапазон истинности устанавливается в каждой области науки применительно к ее возможностям и потребностям. Никаких логических критериев на этот счет нет, если не считать банальных пожеланий по возможности сузить этот диапазон и не включать в него любые возможные высказывания. И только благодаря тому, что логический педантизм здесь уступает место практической целесообразности, во многих случаях становится возможным использование высказываний и из допущений того, чего нет и не может быть на самом деле, получать высказывания, истинные в принятом диапазоне.

§ 4. Величина

Частный случай терминов типа Pa^i образуют термины, в которых a^i есть знак величины. К знакам величины относятся такие архаические выражения, как «много», «сильно», «медленно» и т. п. В науке знаки величин суть числа с названиями единиц измерения и знаками способов получения чисел, т. е. имеют сложную структуру. Так что соответствующие термины расчленяются на три части и имеют вид

$$P\alpha\beta,$$

где P — название признака, α — число, β — название величины.

Высказывания вида $s \leftarrow Pa$ трансформируются в высказывания вида $P \downarrow s = b$, $P \downarrow s > b$ и т. п. Например, высказывание «Тело A имеет скорость a км/час» трансформируется в высказывание «Скорость тела A равна a км/час». Так что имеются высказывания, похожие на высказывания с многоместными предикатами, но являющиеся трансформациями односубъектных высказываний. Конечно, их можно рассматривать и как высказывания с многоместными предикатами. Так, в нашем примере высказыванию можно придать вид «Величина скорости A и величина a км/час равны».

Термины Pa обладают такими свойствами:

$A1$. Если величины α и β равны, то $P\alpha \rightleftharpoons P\beta$.

$A2$. Если величины α и β не равны, то $\sim (P\alpha \rightharpoonup P\beta)$ и $\sim (P\beta \rightharpoonup P\alpha)$.

$A3$. Если α и β не равны, а $s \leftarrow P\alpha$ и $s \leftarrow P\beta$ не являются элементами диапазона истинности высказываний об объекте $s \downarrow P$, то $(s \leftarrow P\alpha) \rightarrow \sim (s \leftarrow P\beta)$.

Способ измерения величин играет такую же роль, как и способ установления порядка, т. е. возможно, что при одном способе измерения получится истинное $s \leftarrow P\alpha$, а при другом — $s \leftarrow P\beta$, но при этом α и β не будут равны.

§ 5. Состояния, ситуации, наборы

*D*1. Предмет, обозначаемый термином $\downarrow(s\alpha \leftarrow P)$, есть состояние объекта *s*. Высказывание $s\alpha \leftarrow P$ есть описание состояния *s*.

*D*2. Два состояния $\downarrow X$ и $\downarrow Y$ несовместимы, если и только если $\sim (XY)$.

*D*3. Существование состояний определяется утверждениями:

1. $\downarrow(s\alpha \leftarrow E) \leftarrow E \equiv s\alpha \leftarrow E$
2. $\downarrow(s\alpha \leftarrow P) \leftarrow E \equiv (s \downarrow \alpha P) \leftarrow E$
3. $\downarrow(s\alpha \leftarrow E) \urcorner \leftarrow E \equiv (s\beta \leftarrow E) : (s\gamma \leftarrow E)$
4. $\downarrow(s\alpha \leftarrow P) \urcorner \leftarrow E \equiv ((s \downarrow \beta P) \leftarrow E) : ((s \downarrow \gamma P) \leftarrow E)$,

где α, β и γ различны. Неопределенность исключена, т. е.

5. $\sim (\downarrow X \leftarrow E) \equiv \downarrow X \urcorner \leftarrow E$.

*D*4. Непустое множество совместимых состояний объектов будем называть ситуацией.

*D*5. Если X^1, ..., X^n суть описания состояний данной ситуации, то $X^1 \cdot \ldots \cdot X^n$ есть описание ситуации.

*D*6. Непустое упорядоченное множество различных (в случае двух и более) ситуаций будем называть набором ситуаций или просто набором.

*D*7. Описание набора складывается из описаний его ситуаций и дополнительных терминов или высказываний, фиксирующих порядок ситуаций.

Описание наборов (и ситуаций) образуют основания для построения тех форм знаний, которые не получаются путем вывода из других знаний. Все познавательные действия, не являющиеся выводами, можно теперь представить как операции с описанием наборов.

Построение высказываний из описаний наборов есть замена последних. При этом замена строится с таким расчетом, чтобы выполнялся принцип $X \rightarrow Y$, где Y есть высказывание, заменяющее описание набора X. Проверка высказывания Y осуществляется так: в зависимости от характера Y либо восстанавливается X и производится его проверка, либо выясняется, какого рода описание набора должно быть получено. Во втором случае предпринимаются дополнительные исследования, в итоге которых получается некоторое описание набора X^*. В силу имеющихся соглашений из X^* получается Y^*, и из сравнения Y и Y^* устанавливается значение истинности первого.

Из описаний наборов получаются высказывания такие, что в последних появляются термины или логические знаки, отсутствовавшие в первых.

§ 6. Изменение

$D1$. Состояния $\downarrow(s \leftarrow P)$ и $\downarrow(s \neg \leftarrow P)$ суть статические состояния, а $\downarrow(s? \rightarrow P)$ — переходное.

Статические состояния будем изображать символами вида $x, y, \ldots, \neg x, \neg y, \ldots$, отношение которых таково: если один из x и $\neg x$ есть $\downarrow(s \leftarrow P)$ (или $(\downarrow(s \neg \leftarrow P))$, то другой есть $\downarrow(s \neg \leftarrow P)$ (или $(\downarrow s \leftarrow P)$). Переходные состояния будем изображать символами $?x, ?y, \ldots$.

Пусть исследователь во время t^1 наблюдает состояние x, а в следующее за этим время t^2 — состояние $\neg x$. И этот набор он фиксирует сокращающим высказыванием «x превратилось в $\neg x$», т. е. вводит особый предикат «превратилось». Будем изображать его символом $\Rightarrow$. Вместо символов вида $\Rightarrow(x, \neg x)$ будем использовать адекватные им символы вида

$$x \Rightarrow \neg x, \quad \neg x \Rightarrow x.$$

Высказывания $x \Rightarrow \neg x$ можно также читать как «произошло изменение x в $\neg x$».

Благодаря повторным построениям высказываний типа $x \Rightarrow \neg x$ исследователь научается оперировать предикатом $\Rightarrow$ как особым термином. В логике мы вправе принять его как первичный, разъясняемый подобно тому, как это сделано выше.

$D2$. Будем $x \Rightarrow \neg x$ называть элементарным изменением.

$$A1.\ (x \neg \Rightarrow \neg x) \dashv\vdash (x \Rightarrow x)$$

т. е. отрицание $x \Rightarrow \neg x$ означает, что сохранилось x.

$D3$. Если $x \Rightarrow \neg x$ есть $\downarrow(s\neg \leftarrow E) \Rightarrow \downarrow(s \leftarrow E)$, то это изменение есть возникновение s; если же оно есть $\downarrow(s \leftarrow E) \Rightarrow$ $\Rightarrow \downarrow(s\neg \leftarrow E)$, то оно есть исчезновение (уничтожение) s.

Эмпирические объекты существуют в определенное время, причем один и тот же объект не появляется и не существует дважды. Если имеют место повторения, то эти повторения суть разные элементы одного и того же класса.

Пусть t^1 есть время возникновения s, а t^2 — время его разрушения. Интервал времени между t^1 и t^2 есть время существования (или просто время) объекта s. Обозначим его через t.

A^*. Если t есть время s, то в любое время до t и после t объект s не существует. Ниже мы сформулируем определение выражения «тот же самый» (или «один и тот же»), из которого A^* можно будет получить как следствие.

$D4$. Элементарные изменения $x \Rightarrow \neg x$ и $\neg x \Rightarrow x$ называются противоположными.

$D5$. Изменение есть непустое упорядоченное множество элементарных изменений, не содержащее противоположных изменений. Все, что касается элементарных изменений, распространяется на изменения вообще путем простых обобщений символики. Превращение x в y, где x и y суть непустые множества состояний, будем записывать символами $x \Rightarrow y$.

$$A2.\ \sim (x \Rightarrow y) \dashv\vdash (x \neg \Rightarrow y),$$

т. е. для изменений неопределенности исключены.

Исследование изменения идет по таким линиям:

1) фиксируется то, что изменение произошло;

2) фиксируется то, что имеет место переходное состояние от одного (такого-то) статического состояния к другому;

3) осуществляется анализ изменения, в результате которого выясняются составляющие его изменения;

4) переходное состояние в свою очередь исследуется как изменение.

$D6$. Изменение $x \Rightarrow \neg x$ рассматривается как дискретное, если не принимается во внимание $?x$. Крайний случай — допускается, что никакого $?x$ не бывает (и тогда мы имеем дело с абстрактным объектом).

$D7$. Изменение $x \Rightarrow \neg x$ рассматривается как недискретное, если принимается во внимание $?x$, и последнее в свою очередь рассматривается как совокупность недискретных изменений. Теоретически такой процесс рассмотрения переходного состояния как совокупности изменений бесконечен. Практически же он заканчивается, так что всегда некоторые изменения принимаются за элементарные, и далее их состояния не анализируются.

$$A3.\ (x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z) \sim (X \rightarrow Z) \vdash (x \Rightarrow z)$$

$$A4.\ (x \Rightarrow y)(z \Rightarrow v) \sim (X \rightarrow \sim Z) \vdash (xz \Rightarrow yv)$$

$$A5.\ (xz \Rightarrow yv) \vdash (x \Rightarrow y)(z \Rightarrow v) : (x \Rightarrow v)(z \Rightarrow y)$$

$A6.\ (x \Rightarrow y) \vdash Y$

$A7.\ (x \Rightarrow y) \sim (x \rightarrow y) \vdash \sim X$

$A8.\ (x \urcorner \Rightarrow y) \dashv\vdash (x \Rightarrow \sim y)$

$A9.\ (x\,? \Rightarrow y) \dashv\vdash \sim X \sim Y$

Изменение признаков объектов есть частный случай изменения. Пусть в t^1 имеет место состояние $\downarrow(s \leftarrow P\alpha)$, а в t^2 — состояние $\downarrow(s \leftarrow P\beta)$, где α не равно β, т. е. имеем

$$\downarrow(s \leftarrow P\alpha) \Rightarrow \downarrow(s \leftarrow P\beta)$$

Это изменение в силу утверждений

$$(s \leftarrow P\alpha) \rightarrow \sim (s \leftarrow P\beta),\ \ (s \leftarrow P\beta) \rightarrow \sim (s \leftarrow P\alpha),$$

если α не равно β, есть сложное изменение, состоящее из элементарных изменений

$$\downarrow(s \leftarrow P\alpha) \Rightarrow \downarrow(s \urcorner \leftarrow P\alpha) \text{ и } \downarrow(s \urcorner \leftarrow P\beta) \Rightarrow \downarrow(s \leftarrow P\beta).$$

Можно ли применять предикат изменения к самому изменению как особому объекту (введенному определениями $D2$—$D4$), т. е. можно ли говорить об изменении изменения? Вопрос этот не праздный, с отсутствием ясности в этом деле связаны многочисленные спекулятивные рассуждения и заявления. Для точного ответа на этот вопрос надо ввести еще дополнение определения для существования изменений и значений истинности высказываний о них.

$D8$. Будем говорить, что имеет место (существует) переходное состояние от $\downarrow X$ к $\downarrow Y$ или от $\downarrow Y$ к $\downarrow X$, если и только если имеет место $\downarrow(\sim X \sim Y)$ (или истинно $\sim X \sim Y$).

$D9$. Собственное время изменения $x \Rightarrow y$ есть минимальный интервал времени t такой, что исследователь может обнаружить (или признать) состояние $\downarrow X$ и затем состояние $\downarrow Y$. Причем минимальность зависит от отражательного аппарата исследователя (или от определений в случае абстрактных объектов).

В собственное время $x \Rightarrow y$ существует $\downarrow X$, $\downarrow(\sim X \sim Y)$ и $\downarrow Y$ в соответствующем временном порядке.

$D10$. Изменение $x \Rightarrow y$ существует (осуществилось) в t^2, если и только если в t^2 имеет место $\downarrow Y$, а во всякое время до t^2 имеет место $\downarrow X$ или $\downarrow(\sim X \sim Y)$, причем t^2 есть часть собственного времени $x \Rightarrow y$. Изменение $x \Rightarrow y$ не существует в другое время, отличное от t^2.

Согласно $D10$, $\downarrow(x \Rightarrow y)$ существует в t^2 и только в t^2. В остальное время оно не существует. Это обстоятельство надо помнить при предицировании изменений.

Что может иметься в виду, когда речь идет об изменении изменения? Здесь возможны такие случаи: 1) $\downarrow X$ превращается не в $\downarrow Y$, а в $\downarrow Z$; 2) $\downarrow X$ превращается в $\downarrow Y$, но иначе. В первом случае просто имеет место другое изменение $x \Rightarrow z$. Во втором случае встает вопрос: сравнительно с чем иначе? Если произошло $x \Rightarrow y$, то оно уже не существует и не будет существовать никогда. Значит речь может идти только о сравнении различных изменений одного и того же класса.

Пусть $\downarrow X^1 \in K \downarrow X, \downarrow X^2 \in K \downarrow X, \downarrow Y^1 \in K \downarrow Y, \downarrow Y^2 \in K \downarrow Y$. Пусть, далее, происходят или могут произойти изменения $x^1 \Rightarrow y^1$ и $x^2 \Rightarrow y^2$. Эти изменения могут различаться по самым различным признакам, будучи элементами одного и того же класса изменений $K \downarrow (x \Rightarrow y)$. В частности, собственное время второго может быть больше или меньше собственного времени первого (т. е. оно может произойти быстрее или медленнее).

§ 7. Парадокс изменения

Движение, т. е. перемещение тел в пространстве, есть лишь частный случай изменений предметов. На него распространяется все, сказанное выше об изменении вообще. Ниже мы рассмотрим известный парадокс движения «Движущееся тело находится и в то же самое время не находится в данном месте пространства», обобщив его как парадокс изменения «Изменяющийся объект имеет и в то же самое время не имеет данный признак» (в частности, признаком может быть существование).

В большинстве случаев на вопрос «Может ли физическое тело находиться и в то же самое время не находиться в данном месте?» отвечают отрицательно. И в большинстве случаев мотивы отрицательного ответа заслуживают критики.

Физическое тело не может находиться и в то же самое время не находиться в данном месте потому, что таков мир, — так часто отвечают на поставленный выше вопрос. Действительно, в нашем опыте не встречаются случаи, противоречащие такому ответу. И никогда не встретятся. Но причина этого принципиально отличается от причин того, что не встречаются лошади с десятью рогами и зайцы с лошадиными копытами. Причина этого заключается в том, что мы употребляем знаки «и» и «не», а высказывание «Физическое тело находится в данное время в данном месте» есть частный случай высказывания. И никакой иной премудрости здесь не заключено. Сложность проблемы здесь заключена исключительно в ее банальности (точнее — в том, что боятся признаться в банальности).

Обоснование отрицательного ответа на рассматриваемый вопрос иногда ищут в анализе смысла выражения «находится в данном месте». Сама мысль о том, что источником онтологических утверждений в логике могут быть определения терминов, совершенно справедлива. И мы ниже рассмотрим пример такого рода. Но в данном случае смысл выражения «находится в данном месте» не играет никакой роли.

О парадоксах движения создана гигантская литература. Характерная черта этой литературы состоит в том, что все авторы высказывают соображения по поводу способов устранения таких парадоксов, но никто не показывает, как они получаются. При этом в подавляющем большинстве случаев не видят чисто логической стороны парадокса и привлекают сложный материал из истории физики и математики, который, по нашему мнению, не имеет никакого отношения к данному парадоксу и лишь еще более запутывает довольно простой вопрос. И в общем проблема так и считается до сих пор нерешенной.

По нашему мнению, трудность решения этих парадоксов состоит прежде всего не в том, что трудно придумать способ их устранения, а в том, что трудно показать, как они получаются. Эти парадоксы мнимые, их просто не существует. А найти способ решения несуществующей трудности невозможно.

Логически вопрос о парадоксах в общем виде тривиален: если из $X^1, \ldots, X^n$ логически следует противоречие $\sim YY$, то $\sim (X^1 \cdot \ldots \cdot X^n)$, т. е. $\sim X^1 \vee \ldots \vee \sim X^n$. И исследование должно решить, какие из $X^1, \ldots, X^n$ повинны в образовании противоречия. Но именно это необходимое условие разрешения парадоксов, т. е. отыскание высказываний, из которых логически следует парадокс движения, в работах по парадоксам движения не выполняется. Разрешить парадокс — значит показать, как он получается из данных предпосылок по правилам логики (или дополнительным правилам вывода, принимаемым в той или иной науке).

Утверждение «Изменяющийся объект имеет и в то же время не имеет некоторый признак» логически ложно как частный случай противоречия. Оно ложно, повторяем, не потому, что таков мир, окружающий нас, а потому, что таков язык, на котором мы говорим, т. е. в силу свойств логических операторов, входящих в него. И если при этом хотят сказать что-то иное, не охватываемое этими операторами, то должны употреблять другие операторы. Но раз мы используем именно эти операторы, мы не можем из них и X построить нечто такое, что не отвечало бы их свойствам.

И все же рассматриваемое утверждение употребляют. И даже есть философы, считающие его истинным. Откуда оно берется? Является разультатом наблюдения и эксперимента? Ничего подобного. Логически невозможное невозможно и фактически. Значит оно либо есть постулат (аксиома), либо есть следствие из других утверждений. Если оно есть постулат, то оно должно быть отброшено, ибо из него следует логическое противоречие (оно само). Если оно есть следствие других утверждений, надо это показать.

Покажем, как можно получить рассматриваемые утверждения последним способом. Это будет в некотором роде реконструкция или экспликация неявных рассуждений, обычно предполагаемых в работах о парадоксах движения.

Эмпирически замечены случаи, когда происходит переход из одного статичного состояния объекта в другое, — переходные состояния. Для описания переходного состояния не годятся оба высказывания, фиксирующие статичные состояния. Оба они неверны. Если в нашем распоряжении имеется только классическая логика (и, соответственно, двузначная логика истинности и ложности), то одно статичное состояние будет описано высказыванием X, а другое — высказыванием $\sim X$. В силу эмпирических данных на языке классической логики переходное состояние будет записано высказыванием $\sim X \cdot \sim \sim X$. Поскольку $\sim \sim X$ равнозначно X (или из $\sim \sim X$ логически следует X), отсюда получаем $\sim X \cdot X$, т. е. должны признать истинным противоречие.

Парадокс тривиально разрешается, если различить внутреннее и внешнее отрицание и ввести оператор неопределенности. Тогда статичные состояния объекта s будут зафиксированы высказываниями $s \leftarrow P$ и $s \urcorner \leftarrow P$, а переходные — высказыванием $\sim (s \leftarrow P) \cdot \sim (s \urcorner \leftarrow P)$ или $s? \leftarrow P$. Поскольку из $\sim (s \urcorner \leftarrow P)$ логически не следует $s \leftarrow P$ (или, что дает тот же эффект, эти высказывания не равнозначны), то получить из $\sim (s \leftarrow P) \cdot \sim (s \urcorner \leftarrow P)$ по правилам логики $\sim (s \leftarrow P) \cdot (s \leftarrow P)$ просто невозможно, ибо утверждение

$$\sim (s \leftarrow P) \cdot \sim (s \urcorner \leftarrow P) \vdash \sim (s \leftarrow P) \cdot (s \leftarrow P)$$

в общем случае недоказуемо. Оно доказуемо лишь в частном классическом случае. Но в силу самой исходной предпосылки (допущение переходного состояния) здесь имеет место именно неклассический случай.

Таким образом, причина рассматриваемого парадокса — использование правил классической логики (правил для двух возможностей) в ситуации, которая предполагает неопределенность и две формы отрицания, т. е. неклассическую логику (правила, имеющие силу для трех возможностей). С точки зрения неклассической логики, изложенной нами выше, никаких парадоксов изменения не получается. Эта теория вывода позволяет без противоречий рассуждать и об изменениях предметов.

Здесь не представляется возможным проанализировать другие парадоксы, связанные с движением. Ограничимся лишь кратким замечанием по поводу парадокса «Ахиллес и черепаха». Парадокс формулируют так: Ахиллес и черепаха движутся в одном направлении; Ахиллес отстает от черепахи на расстояние a^1; скорость движения Ахиллеса превосходит скорость движения черепахи; когда Ахиллес пробежит расстояние a^1, черепаха за это время проползет расстояние a^2, и Ахиллес должен будет преодолеть a^2; когда Ахиллес сделает это, черепаха за это время проползет расстояние a^3, и т. д. без конца для любого a^i; отсюда делают вывод что Ахиллес не догонит черепаху.

Однако вывод этот неправомерен: из изложенных посылок он логически никак не следует. И всякие ссылки на математику и физику при попытках разрешить парадокс лишены смысла, ибо вывод получен не по правилам логики, а на основе каких-то психологических и языковых ассоциаций. Чтобы получить вывод «Ахиллес не догонит черепаху», задуманные условия надо переформулировать так: пока черепаха не преодолела расстояние a^i, Ахиллес не должен преодолевать расстояние, превышающее a^{i-1}. Это условие можно наглядно представить себе так: Ахиллес и черепаха скреплены стержнем, который может сжиматься сколь угодно, но никогда не превращается в ноль (не исчезает). При этом условии Ахиллес действительно не догонит черепаху. Но в этом нет абсолютно ничего парадоксального.

Существует мнение, что парадоксы Зенона (к которым относятся парадоксы движения) до сих пор не разрешены. И это действительно так, ибо, разрешая «парадоксы Зенона», различные авторы под этим названием решают какие-то свои разнообразные проблемы, а не действительные парадоксы, которые либо тривиальны, либо не существуют вообще.

§ 8. Пространство и время

При обсуждении проблем пространства и времени полезно различать два аспекта: 1) установление значения терминов «время», «пространства», «раньше» и т. д., т. е. терминологический аспект; 2) установление того, в каком пространственно-временном отношении находятся те или иные заданные предметы, т. е. физический (или, скажем, измеренческий) аспект.

Различие терминологического и измеренческого аспектов отчетливо видно хотя бы из такого гипотетического примера. Пусть мы обучаем исследователя предикатам «раньше» и «позже». Мы можем сконструировать условия обучения так, что события A и B им будут восприниматься в обратном временном порядке сравнительно с тем, как их будем воспринимать мы (читатель и автор). И все-таки мы научим исследователя осмысленно оперировать упомянутыми предикатами. Пусть его высказывание «A раньше B» будет ложно с нашей (измеренческой) точки зрения. Смысл его будет ясен для исследователя (с терминологической точки зрения).

Физические теории пространства и времени не дают определений пространственно-временной терминологии в том смысле, что не вводят эту терминологию впервые в употребление через другие термины с известным значением. Они предполагают эту терминологию данной и формулируют методы установления пространственно-временных отношений предметов для различного рода трудных (сравнительно с обычным житейским опытом) случаев, в частности для различно движущихся систем, для удаленных событий, для случаев, когда имеет значение скорость распространения сигналов о событиях и т. д. При этом физические теории явно или неявно предполагают случаи, когда установление пространственно-временных отношений предметов никакой проблемы не представляет (и на примере которых соответствующая терминология вводится в обиход). Назовем эти случаи базисными. В частности, имеются случаи, когда последовательность восприятия событий считается точно совпадающей с их объективной последовательностью. Пространственно-временные отношения для всех прочих случаев выясняются путем применения правил логики, математики и физики к тем данным, которые поставляет наблюдение базисных случаев. В качестве одного из своих условий и одного из своих побочных эффектов физические теории осуществляют экспликацию пространственно-временной терминологии.

В силу разделения труда, сложившегося в науке, проблемы исследования пространственно-временных свойств мира стали проблемами физики. Физика развивает соответствующую теорию измерений, учитывающую скорость сигналов о наступлении событий, перемещение событий и наблюдателей, взаимные перемещения событий и т. д. Здесь возникают свои трудности, складываются парадоксальные ситуации. Но эти трудности и «парадоксы» суть показатели сложности проблемы измерения пространственно-временных отношений. Они имеют внелогическую природу.

Уже на уровне здравого смысла является тривиальностью следующее обстоятельство. Пространство и время заключают в себе что-то такое, что мешает рассматривать их как эмпирические вещи, которые можно пощупать, сжать, растянуть, сломать и т. п. Пространство и время не являются эмпирическими объектами. Нельзя отдельно наблюдать эмпирические объекты и их изменения, с одной стороны, и пространство и время — с другой. Бессмысленно говорить об изменении, возникновении и исчезновении пространства и времени. Бессмысленно говорить о скорости времени и т. п. Однако выражения «изменение времени», «скорость времени», «поток времени», «разное течение времени», «обратный ход времени» и т. д. прочно вошли в обиход и часто употребляются не только как литературные модификации терминов, обозначающих пространственно-временной порядок объектов, пространственно-временные интервалы, ряды, структуры и т. п., а буквально. Логический анализ пространственно-временной терминологии здесь был бы явно полезен.

§ 9. Экспликация пространственно-временной терминологии

Пространственно-временные термины давно изобретены людьми и успешно употребляются как в науке, так и вне ее. Имеются простые способы, посредством которых новые поколения людей практически обучаются владеть ими. И не заметно, чтобы люди нуждались в их каком-то новом переопределении.

Определить термин, как мы уже говорили, — значит установить его значение, используя другие термины, значение которых уже известно. Попытки ввести пространственно-временные термины путем определения через другие обнаруживают, что для этого требуются термины, не имеющие с точки зрения первичной ясности никаких преимуществ перед пространственно-временными терминами. Кроме того, среди последних имеются такие, которые вообще вводятся в употребление не посредством определений, а иными способами. И применительно к такого рода терминам речь может идти лишь об их экспликации (и даже логической экспликации).

Эксплицирующие термины по воспринимаемому виду (графически, по звучанию) могут быть тождественны эксплицируемым. Именно так обстоит дело в нашем случае. В этом нет ничего страшного, если постоянно помнить различные роли одних и тех же слов. Но практически совместить в одной голове двоякое употребление терминов без путаницы вряд ли возможно.

Чтобы несколько облегчить различение двух родов терминологии, мы должны вспомнить о нашем идеальном исследователе, которого по допущению можно обучить пространственно-временной терминологии так, что ее можно будет рассматривать как экспликацию известной нам (читателю и автору) терминологии.

§ 10. Пространственно-временные термины

Простейшие пространственно-временные термины суть термины из области значения знаков $>$, $<$ и $=$. Их отношения друг к другу таковы, как отношение этих знаков в общем случае. Что касается их особенностей, то надо выяснить следующее: что присоединяется к логическим соображениям, когда мы выбираем ту или иную тройку конкретных терминов порядка (например, «раньше — позже — одновременно», «ближе — дальше — на одинаковом расстоянии» и т. п.)?

В общем обо всех простейших пространственно-временных терминах такого рода можно сказать следующее: исследователь имеет особые приспособления (прирожденные способности, если это человек; особые технические средства, если это человекоподобная машина), благодаря которым он фиксирует пространственные и временные отношения, и после достаточно большого числа повторений научается правильно употреблять соответствующие термины (подобно тому, как люди усваивают большинство слов языка, обозначающих вещи, события, поступки и т. п.). Приспособления, о которых сказано выше, — поворот глаз, поворот тела, смена восприятий и т. п. Все это дологические операции.

Важно отметить различие предметов, которые фигурируют в пространственном и временном порядке. В случае пространственного порядка предметы суть эмпирические (воспринимаемые, т. е. видимые, слышимые и т. п.) предметы. В случае временных отношений предметы суть воспринимаемые изменения (наступления событий, «вспышки», «возмущения» и т. п.).

Та пространственно-временная терминология, о которой идет речь, есть совокупность предикатов, высказываемых об эмпирических предметах и изменениях. Исследователь еще не может использовать усвоенную им терминологию в качестве субъектов суждений. Исследователь может выбрать какие-то предметы и высказаться о них, используя эти предикаты, но он еще не имеет возможности высказать что-либо о пространстве и времени как об особых предметах, ибо он еще не имеет для этого подходящих терминов. Эти термины еще надо ввести в его язык.

Пространственно-временные субъекты суть порядковые субъекты. В обычном опыте людей они вводятся в употребление посредством операций, которые сами эксплицируются в логике как определения. Ниже мы рассмотрим, что присоединяется к логическим соображениям, изложенным выше, вследствие особенностей пространственных и временных субъектов. Рассмотрим это на примере центральных субъектов этой группы, определяемых посредством понятия структуры.

Рассмотрим прежде всего термины, обозначающие то или иное данное пространство и время. Пусть эмпирические предметы a^1, ..., a^n образуют пространственную структуру относительно некоторого множества способов установления порядка. Обозначим ее через A. Но термин A еще не есть термин, обозначающий пространство A. Для введения последнего необходимы еще дополнительные допущения (абстракция). И в зависимости от того, каковы они, возможны по крайней мере три различных термина для данного пространства A.

Для образования термина, обозначающего данное пространство A в смысле один, осуществляется следующее. Берется пространственная структура A и происходит отвлечение от всех предметов, которые находятся внутри ее, а также от того, что именно предметы a^1, ..., a^n образуют ее. Этому отвлечению придают наглядную форму допущений, вполне соответствующих обычному опыту: находящиеся внутри A предметы могут быть изъяты из нее (и предельный случай допущения — пустое или чистое пространство без вещей), любые предметы подходящего размера могут быть помещены в A, предметы a^1, ..., a^n могут быть заменены любыми другими предметами, подходящими для фиксирования граничных точек структуры A. В результате этих допущений под данным пространством A будет пониматься лишь то, что заключено между какими-то предметами, расположение которых таково же, как расположение предметов a^1, ...,a^n в структуре A. Индивидуальность данного пространства определяется положением структуры A в целом относительно других предметов.

Для образования термина, обозначающего данное пространство A в смысле два, осуществляется то же самое, что и в первом случае, за исключением допущений относительно предметов a^1,..., a^n: они принимаются во внимание как граничные точки данного пространства. При образовании термина данного пространства A в смысле три допускают, что его образует пространственная структура A с какими-то предметами, которые находятся внутри ее. Здесь возможны варианты: согласно одному из них, в данное пространство A включаются все предметы, находящиеся в A, и в этом случае данное пространство A есть кусок материи, заключенный в пространственной структуре A; согласно другим, в него включаются лишь какие-то особые виды «тонкой» материи (в частности, такие, которые физически нельзя изъять из A в принципе ни при каких обстоятельствах).

Аналогично обстоит дело с терминами данного времени. Берется временнáя структура B, образованная событиями b^1, ..., b^n, и осуществляются допущения относительно событий b^1, ..., b^n и событий внутри B, подобные допущениям для терминов данного пространства. Заметим только, что допущения для времени, подобные допущениям для пространства, точно так же имеют наглядную основу в опыте людей. Дело в том, что наш исследователь фиксирует некоторую пространственную структуру в какое-то определенное время, а временную структуру — в какой-то определенной области пространства. А области пространства, где, по-видимому, ничего не происходит («все спокойно»), в какой-то мере встречаются в опыте людей. Точно так же в рамках заданной временно́й структуры исследователь может вызывать сам подходящие события или препятствовать их наступлению. По крайней мере он может не обращать на них внимания. В третьем смысле данное время B есть мир со всеми (или с избранными) событиями во временно́й структуре B.

Термины «данное пространство» и «данное время» образуются (подобно термину «структура») как обобщение терминов, обозначающих конкретные пространства и времена. Конечно, в реальных языках здесь имеет место комплекс разнообразных терминов вроде «интервал», «место», «отрезок», «область пространства» и т. п., но они все суть частные случаи, подобно тому как термины «бинарная структура», «тернарная структура» и т. п. суть видовые термины для термина «структура».

Но обычно, когда употребляют термины «пространство» и «время» сами по себе, то (в отличие от соотношения термина «структура» и терминов, обозначающих конкретные структуры) имеют в виду не любые конкретные пространства и времена («отрезки» и «объемы» пространства и времени), а их объединение в целое. Для введения этих терминов (скажем, «пространство в целом» и «время в целом»), надо допустить пространственную и временну́ю структуры такие, в которые включаются любые данные пространственные и, соответственно, временны́е структуры (в рассмотренном выше смысле). И в отношении этой гипотетической структуры проделать те же допущения, что и в отношении данных пространственных и временных структур. Только при этом различие первого и второго смысла терминов теряется. Остается лишь различие первого и третьего: 1) пространство — вместилище всех вещей, время — чистая длительность; 2) пространство — мир всех (или избранных) вещей, время — мир всех (или избранных) событий.

Как видим, даже при условии крайне упрощенного рассмотрения пространственно-временны́х терминов обнаруживается явное разнообразие значений терминов, которые зачастую смешиваются самым фантастическим образом. Причем возникающую при этом путаницу нередко выдают за принципиальную сложность, а подмену одних терминов другими — за развитие понятий, за более глубокое проникновение в суть пространства и времени и т. д.

А между тем судьба многих высказываний с пространственно-временно́й терминологией всецело зависит от того, какие определения приняты (явно или неявно) для нее. И от этой зависимости не в состоянии избавить никакие сверхновейшие достижения науки. Если, например, высказано утверждение, что пространство в районе такой-то звезды искривлено, то это утверждение еще ровным счетом ничего не значит, пока не сказано, в каком смысле здесь употреблен термин «пространство». Если он употреблен в первом смысле, то это утверждение бессмысленно, ибо искривлен может быть лишь какой-то ряд предметов относительно какого-то другого ряда, а с точки зрения первого понятия пространства все это исключено. Значит термин «пространство» употреблен здесь в третьем смысле. Но в таком случае абсолютно ничего удивительного в этом нет.

§ 11. Два примера следствий из определений

Большинство людей принимает утверждение, что физическое тело не может одновременно находиться в разных местах. Но спросите, почему тот или иной человек так считает, вы, как правило, получите ответ: так устроена природа.

Природа, однако, тут совершенно ни при чем. И приведенное утверждение не так уж бесспорно, если покопаться в том, что оно означает. На самом же деле это утверждение принимается лишь постольку, поскольку неявно принимается некоторое определение термина «разные места». И если изменить это определение, то рассматриваемое утверждение может оказаться ложным.

Что означает термин «разные места»? Пусть берется какая-то область пространства («место») x и область пространства («место») y. Примем следующее определение: x и y суть разные места, если и только если для любого предмета a будет иметь силу, что если a находится в x, то в то же самое время a не находится в y, и если a находится в y, то в то же самое время a не находится в x. Наше утверждение по правилам логики вытекает из этого определения термина «разные места».

Можно определить термин «разные места» по-другому (ослабить): x и y суть разные места, если и только если для некоторого предмета a имеет силу то, что если a находится в одном из x и y, то в то же самое время a не находится в другом. По этому определению не исключается то, что некоторое тело может находиться одновременно в x и y, т. е. в разных местах.

Первое из приведенных определений означает, другими словами, что пространственные области x и y не имеют никаких общих «точек» (не пересекаются), второе — что x и y не совпадают (хотя не исключено, что они могут пересекаться). И никакое из них не хуже и не лучше. Но в обиходе термин «разные места» употребляется обычно в первом смысле.

Если принято первое определение, то из него логически следует также то, что невозможно мгновенное перемещение. Перемещение тела означает, что оно находится в разных местах. Перемещение называется мгновенным, если и только если тело находится в некотором месте и в то же самое время находится в другом месте. Но если тело не может одновременно находиться в разных местах, то мгновенное перемещение невозможно в силу определений. Получается довольно любопытная ситуация: допущение возможности мгновенных перемещений есть физическое допущение, противоречащее логике. И это допущение правомерно лишь как намерение не учитывать время, затраченное в том или ином случае на перемещение.

§ 12. Предицирование пространства и времени

Обработка пространственно-временной терминологии не заканчивается введением соответствующих субъектов. Если последние введены, это не означает, что мы можем получать осмысленные высказывания, соединяя их с любыми предикатами. Условия предицирования пространства и времени для целого ряда предикатов еще должны быть определены. Возьмем, например, утверждение о бесконечности пространства. Оно имеет смысл лишь как сокращение для следующего положения: имеется способ установления порядка, относительно которого упорядочиваются пространственные структуры; и этот упорядоченный ряд бесконечен. В противном случае оно не имеет смысла.

Вопрос об определении условий приписывания предикатов пространственно-временным субъектам рассмотрим на примере предиката существования и предикатов изменения.

В каком смысле говорят о существовании пространства и времени? Оставим в стороне различия терминологии, рассмотренные выше, и выделим общее: 1) вопрос о существовании данного пространства и времени и пространства и времени вообще; 2) вопрос о существовании пространственно-временных структур.

Первый вопрос принципиальных трудностей не представляет: вопрос о существовании любого пространства (и времени) и вопрос о существовании пространства (времени) вообще совпадают и сводятся к вопросу о существовании некоторого данного пространства (и времени), подобно тому как вопрос о существовании стола вообще сводится к вопросу о существовании какого-то конкретного стола.

Вопрос о существовании структур сводится к вопросу о существовании порядковых отношений $a\alpha Rb$, а существование последних определяется в зависимости от существования предметов a и b: отношение $a\alpha Rb$ существует, если и только если существуют a и b и при этом отношение между ними именно таково, как сказано в утверждении «$a\alpha Rb$». Все прочие определения существования являются лишь усложнением этой схемы.

Поскольку пространственные структуры образуют эмпирические предметы, то из самого определения предиката существования для этих структур следует, что пространство не существует без эмпирических предметов. Это — не опытный факт, а именно логическое следствие из определений. Но поскольку не только в обиходе, но и в науке обходятся неявными определениями, это обстоятельство остается скрытым, и положение о невозможности существования пространства без вещей расценивается как результат наблюдений или как постулат. Совершенно аналогично для времени: время не существует без эмпирических изменений, и это — следствие из определений, а не результат наблюдений или постулат.

Данное пространство A существует для исследователя, если и только если для него существует данная пространственная структура A (или существуют какие-то предметы, образующие пространственную структуру A, в случае первого смысла термина). А последняя существует для исследователя, если и только если существуют предметы $a^1, \ldots, a^n$ (или какие-то предметы в соответствующих местах), и порядок их таков, как сказано в определении A. Пространство вообще существует для исследователя, если и только если для него существует какое-то данное пространство. Важно заметить, что здесь предполагается существование предметов, образующих данную пространственную структуру, в некоторое данное время (предполагается «одновременность» вещей).

Определения существования для времени аналогичны, только напоминаем, что временны́е структуры образуют не эмпирические устойчивые вещи, а изменения вещей. И здесь важна разновременность изменений. Изменения, образующие данную временну́ю структуру, наблюдаются исследователем и, следовательно, существуют для него в разное время, а сама временна́я структура существует для него именно тогда, когда она им фиксируется. Так что для исследователя имеет смысл говорить не о времени существования данного времени, а лишь о некоторой пространственной области, в которой исследователь наблюдает изменения, образующие данную временну́ю структуру. Эти изменения, можно сказать, «однопространственны». Так что, кстати сказать, утверждения о том, что пространство и время не существуют друг без друга, не есть опытное утверждение. Оно, опять-таки, есть следствие определений существования.

§ 13. Тот же самый предмет

Когда говорят об изменении предмета a, то предполагают фиксирование его состояний во время t^1 и во время t^2, причем одно из t^1 и t^2 превосходит другое по порядку. При этом имеется в виду один и тот же (тот же самый) предмет a. Хотя это выражение «один и тот же» («тот же самый») кажется очевидным, оно заслуживает самого серьезного внимания, ибо от него зависит судьба многих утверждений и даже концепций.

Для того чтобы считать эмпирические предметы a и b одним и тем же (тем же самым) предметом, необходимо выполнение для них таких условий: 1) в любое время предмет a тождествен предмету b по любому пространственному порядку относительно любого способа установления порядка; 2) всегда, когда существует один из a и b, существует и другой из них (отсюда по правилу контрапозиции получаем: если не существует один из них, то не существует и другой). Если мы утверждаем, что a и b суть один и тот же предмет, то указанные утверждения 1 и 2 выполняются, Обратимся к структурам. Возьмем структуру A, образованную предметами $a^1, \ldots, a^n$, и структуру B, образованную предметами $b^1, \ldots, b^m$. Определение выражения «тот же самый» применительно к структурам должно, очевидно, учесть прежде всего соотношение предметов, образующих структуры. Для того чтобы A и B можно было считать одной и той же структурой, необходимо следующее: 1) $m = n$; 2) a^i и b^i суть один и тот же предмет. Но остаются еще отношения между предметами, образующими структуру. Включать тождество отношений в A и в B в определение выражения «тот же самый» применительно к структурам или нет? В природе вещей на этот счет не заложено ничего такого, что обязывало бы нас принять то или иное решение. И если проанализировать фактически встречающиеся случаи употребления рассматриваемого выражения, то можно встретить как те, так и другие варианты.

§ 14. Изменение пространства и времени

Возьмем пространственную структуру A, образованную предметами $a^1, \ldots, a^n$. Для того чтобы считать A, взятую во время t^1, и A, взятую в другое время t^2, одной и той же структурой, необходимо, чтобы для каждого a^i выполнялось следующее: a^i, взятый в t^1, и a^i, взятый в t^2, суть один и тот же предмет. Но достаточно это условие или нет? Нужно ли в определении указывать на то, что все отношения между a^i в t^2 остаются такими же, как в t^1?

Если это второе условие в определении не указывать (не считать его обязательным), то пространственные структуры в силу определений будут иметь возможность изменяться (т. е. утверждение «A изменилась» и другие производные утверждения о величинах изменений, о скорости и т. п. могут быть истинными). Если же это условие считать обязательным, то все пространственные структуры будут неизменны по определениям: если отношения между a^i в t^2 не изменились сравнительно с t^1, то структура A не изменилась; если же они изменились, то мы не имеем права сказать, что A в t^1 и A в t^2 суть одна и та же структура, и не имеем условий для применения предикатов изменения.

Ничего страшного для самих пространственных структур из-за принятия второго условия не происходит: оно не мешает тому, что происходит смена одних структур другими. И все то, что можно сказать без принятия второго условия, можно сказать и с ним, только в несколько иных выражениях (на ином варианте языка). Нам здесь важно обратить внимание на то, что смысл утверждений зависит от смысла входящих в него терминов. И именно на неясности и двусмысленности терминологии строятся многие «новейшие» рассуждения о «новейших достижениях науки».

Заметим, кстати, еще одно интересное обстоятельство. Предмет a, взятый в любое время, есть один и тот же предмет a. Здесь указание на время не входит в состав термина. Если же мы введем указание на время в термин, т. е. возьмем термин «a, взятый в t^1» («a, который существует в t^1») и «a, взятый в t^2» («a, который существует в t^2»), и при этом один из t^1 и t^2 превосходит другой, то обозначаемые ими предметы нельзя рассматривать как один и тот же предмет в силу второго пункта определения. Они суть лишь представители одного и того же класса предметов a. Так что если при задании пространственной структуры A фигурируют названия образующих ее предметов только что рассмотренного вида, то условия для применения предикатов изменения исчезают, и все высказывания об изменениях пространственных структур оказываются непроверяемыми. Их можно высказывать в любых видах и количествах с полной гарантией, что их не опровергнут. Но их никогда и не подтвердят — такова цена всякой бессмыслицы, какой бы привлекательной она ни казалась на первый взгляд.

Обратимся к временным структурам. Здесь для того, чтобы сказать «та же самая временная структура», требуется, чтобы были теми же самыми образующие ее события. Возьмем простейший случай — структуру B из двух событий a и b. Время существования B есть время, образованное ею самой. Пусть a произошло в t^1, а b — в t^2. Пусть интервал между t^1 и t^2 есть время t_1. Чтобы судить об изменении, надо взять ту же самую структуру B в другое время t_2. Причем t_1 и t^1, как и t_2 и t^2, суть разные времена. Но по определению существования событий события a и b не существуют в t_2. Если мы возьмем некоторые события, аналогичные a и b, но существующие в t_2, они по определениям не существуют в t_1. Так что здесь даже независимо от условия, аналогичного второму условию для пространственных структур, все высказывания об изменениях временных структур нельзя проверить. Здесь нельзя сказать, что временная структура изменилась. Но нельзя сказать, что она не изменилась: чтобы признать, что B не изменилась, нужно воспроизвести те же самые события a и b в t_2, что невозможно в силу определений. Таким образом, абсолютно все высказывания как об изменениях времени (об ускорении, замедлении и т. п.), так и о его неизменности являются непроверяемыми.

Но можно ли считать, что принятие таких высказываний является делом безобидным? Ничего подобного. Если мы приняли утверждение, что временные структуры изменяются, то в силу смысла соответствующих терминов мы придем к следствиям, противоречащим принятым определениям (например, к заключению, что одно и то же событие осуществляется в разное время). Принятие такого рода высказываний означает неявный отказ от каких-то определений, изменение смысла терминологии и т. п. Это не физические допущения, а всего лишь небрежное обращение со словами.

Единственное, что уместно говорить с точки зрения изменений о временных структурах, это изменение временного интервала между различными представителями классов событий, изменение порядка представителей классов событий и т. п. Но это — банально. Например, мы можем сегодня пообедать в два часа и поужинать в семь часов, а завтра — пообедать в два и поужинать в девять; мы можем сначала выпить и затем закурить, а в другой раз — сначала закурить и затем выпить. Но все это ничего общего не имеет с изменением временных структур и времени.

Возможна ли такая ситуация, что в одном месте мира время идет иначе (быстрее, медленнее, наоборот), чем в другой? Не говоря уж о том, что вообще бессмысленно говорить о движении времени, если строго относиться к словам и рассматривать движение как вид изменения, здесь присоединяются слова, являющиеся результатом сравнения (например, слово «быстрее»). Оставим в стороне указанную бессмысленность и сформулируем проблему приемлемым образом так: пусть события a^1 и a^2 суть элементы класса событий Ka (т. е. однородные события), а b^1 и b^2 — класса Kb. Пусть измерение времени между a^1 и b^1 дало результат $a^1\ (R^1\alpha)\ b^1$, а между a^2 и b^2 — результат $a^2\ (R^2\beta)\ b^2$. Чтобы сравнить эти времена, необходим единый способ установления временного отношения γ как для пары событий a^1 и b^1, так и для пары a^2 и b^2. Лишь после того, как мы получим $a^1\ (R^3\gamma)\ b^1$ и $a^2\ (R^4\gamma)\ b^2$, мы можем высказать свои суждения. Оставив в стороне все проблемы, связанные с трудностями измерений, и допустив, что все они разрешимы, мы получим право сказать нечто о временном отношении событий a^1 и b^1, с одной стороны, и событий a^2 и b^2, с другой стороны, в сравнении. И ровным счетом ничего более. Мы можем, например, сказать, что на планете N^1 в созвездии M^1 сначала происходит a и затем b, а на планете N^2 в созвездии M^2 — наоборот, причем на первой перерыв между a и b вдвое больше, чем на второй.

Короче говоря, если космонавт вернулся на Землю через n лет после отлета, то он прожил ровно n лет по земному времени, как бы он ни отсчитывал время в своем корабле. Если он вернулся живым, то абсолютно никакой заслуги физических теорий измерения времени в этом нет. Вопрос о продолжительности жизни ничего общего с вопросом об измерении времени не имеет. И уж наверняка не случится так, что космонавт, вернувшись на Землю, узнает, что его родители еще не родились. Это не случится в силу свойств употребляемых слов («мать», «отец», «сын» и т. д.) и законов логики, а не в силу каких-то физических допущений. Это так же невозможно, как невозможно высказать истинную конъюнкцию высказывания и его отрицания в силу свойств знаков конъюнкции и отрицания.

Мы ни в коем случае не подвергаем сомнению прогресс науки, роль научной фантазии, роль «безумных идей» и т. п. Мы лишь полагаем, что имеются границы, выходя за которые любая фантазия теряет характер научной. Это — нормы логики и соглашения о смысле употребляемой терминологии.

§ 15. Необратимость времени

Вопрос об обратимости и необратимости времени есть часть вопроса об изменении времени. Мы его выделили здесь, чтобы обратить внимание еще на одну деталь.

Вопрос об обратимости и необратимости времени смешивают с вопросом об обратимости и необратимости процессов. Но если даже на минуту признать, что это — одна и та же проблема, мы должны считаться с такими фактами.

Если мы наблюдаем превращение B в A, а затем обратное превращение A в B, это не будет возврат во времени: если в t^1 наблюдается B, а затем в t^2 имеет место A, то обратное превращение A в B возможно лишь во время t^3, следующее за t^1 и t^2. Кроме того, то B, которое превращалось в A, и то B, в которое превратилось A, это не один и тот же предмет в силу определения выражения «один и тот же предмет». В результате $A \Rightarrow B$ получается предмет такой же, как B (того же класса), но не тот же B.

Необратимость времени стараются обосновать физическими законами (например, ссылкой на второе начало термодинамики). Это — абсурд. Необратимость времени не имеет никаких физических оснований. Временная терминология вырабатывается так (и для таких отношений предметов), что в силу самого способа выработки этой терминологии (при достаточно четкой ее логической экспликации) приходится признать необратимость времени во избежание конфликта с определениями терминов. Вопрос об обратимости и необратимости времени есть вопрос не физический, а чисто терминологический.

§ 16. Причина

Выражение «$\downarrow X$ есть причина $\downarrow Y$» не является однозначным. Оно употребляется как сокращение для совокупности высказываний «Если не-X, то не -Y; наступает $\downarrow X$, вслед за этим наступает $\downarrow Y$», как сокращение для «Если наступает $\downarrow X$, то вслед за этим наступает $\downarrow Y$» или для «Если бы не было $\downarrow X$, то не было бы $\downarrow Y$; имеет место $\downarrow Y$», как сокращение для «Если X и Z, то в отношении R к этому Y; если же не-X и Z, то в отношении R к этому не-Y» и т. п.

Встречается также следующее понимание причины: причина события $\downarrow X$ — это все то, что порождает $\downarrow X$ (все, что необходимо для появления $\downarrow X$). При этом обычно смешивают реальное с отраженным, что ведет к неразрешимым противоречиям. В самом деле, для наступления любого эмпирического события реально требуется бесконечное множество других событий, и зафиксировать причину события практически невозможно. Однако в науке фиксируют лишь некоторые события, вслед за наступлением которых наступает интересующее нас событие. Все остальное совершается само собой, независимо от познания. Фиксируемые события суть своего рода метки для бесконечного множества событий, позволяющие делать некоторые прогнозы относительно наступления других событий. И если причиной называть какие-то события, зафиксированные в определенного рода высказываниях, то знание причин событий есть тривиальный факт науки. Право фиксировать в качестве причины не всю совокупность событий, предшествовавших наступлению $\downarrow X$, а только ее «метки» (т. е. лишь некоторые из этих событий, допустим — $\downarrow Y$) базируется на том, что исследователю удается выбрать такое $\downarrow Y$, осуществление которого предполагает осуществление всех прочих событий, необходимых для наступления $\downarrow X$.

Но даже в том случае, когда различные исследователи слово «причина» употребляют в одном и том же смысле, для одного и того же события различные исследователи могут назвать различные причины, ибо знание смысла термина «причина» не гарантирует того, что только одно определенное событие может быть названо причиной данного события.

§ 17. Часть и целое

Выше на примере термина «причина» мы видели, что при попытке уточнить некоторые привычные онтологические понятия приходится вводить серию других, что делает уточняемые понятия излишними или оставляет им роль обиходных выражений с весьма аморфным смыслом. Так обстоит дело и с понятиями части и целого. Выше мы видели, что для классов уточнением понятия части класса является понятие подкласса, а для структур — уточнением понятия части структуры являются два понятия — подструктуры и включения в структуру. Причем те утверждения с терминами «часть» и «целое», которые считались интуитивно ясными, вообще теряют смысл.

Возьмем, например, бесспорное с точки зрения первичных представлений утверждение «Часть всегда меньше целого». Что оно означает? Что здесь имеется в виду под частью и целым и что имеется в виду, когда употребляется выражение «меньше»? Пусть целое есть класс, а часть — его собственный подкласс. Слово «меньше» в применении к классам может означать, что мощность одного класса меньше мощности другого. Но оно может означать, что найдется по крайней мере один индивид, который включается в один класс и не включается в другой, являющийся подклассом первого. Во втором смысле рассматриваемое утверждение верно, в первом — нет: здесь возможны случаи, когда мощность собственного подкласса равна мощности самого класса.

Аналогично получается в отношении структур. Если целое — структура, а часть — ее подструктура, а слово «меньше» обозначает результат сравнения их пространственных площадей или объемов, то вполне возможно, что часть и целое окажутся равнозначными (например, треугольник есть подструктура по отношению к фигуре, которая получится, если соединить вершины треугольника с точкой внутри треугольника; но площади их равны).

§ 18. Детерминизм и индетерминизм

Понятие детерминизма (как и его отрицания) точно так же неоднозначно. Мы здесь покажем некоторые логически мыслимые возможности на этот счет.

Для отдельно взятого эмпирического события возможны допущения:

1) для всякого (некоторого) события может быть обнаружено другое событие, являющееся его причиной;

2) для всякого (некоторого) события может быть обнаружено другое событие — такое, что первое является причиной его (т. е. являющееся его следствием);

3) допущения типа 1 и 2 имеют место для всех или некоторых временных или пространственных отношений событий, для всех или некоторых времен, областей пространства и условий.

Как видим, логически мыслимо довольно большое число различных допущений такого рода. А если учесть, что возможны различные варианты определения причины (и следствия), а также различные комбинации допущений для множеств из двух и более эмпирических событий, то это число заметно возрастет. Такого рода допущения и их комбинации называют принципами детерминизма, а их отрицания — принципами индетерминизма. Поскольку эти принципы в некотором роде типичны для науки, рассмотрим их подробнее.

Логика не дает никаких аргументов в пользу тех или иных принципов детерминизма и индетерминизма. Она лишь может установить возможные их варианты и осуществить их экспликацию.

Принципы детерминизма заключаются не в допущении возможности предсказывать будущие события по настоящим, а в допущении возможности построения высказываний, позволяющих делать такие предсказания (если, конечно, понятие «причина» определено подходящим образом). Если у нас нет высказываний вида $X \rightarrow (Rx)\ Y$, то, зная состояние мира во время t^1 с любой степенью полноты и точности, мы с уверенностью не сможем еще сказать абсолютно ничего о состоянии мира в последующее время t^2.

Принятие того или иного принципа детерминизма или индетерминизма не расширяет и не сокращает возможностей дедукции в той области науки, в которой он принимается. Иллюзия, будто принятие этих принципов влияет на дедуктивную базу науки, возникает за счет того, что при экспликации их на языке логики утрачивается одно различие между причиной и следствием, не играющее роли с точки зрения экспликации этих принципов, но существенное с точки зрения хода научного исследования, а именно следующее. Из двух участников причинно-следственного отношения, фигурирующего в рассматриваемых принципах, в конкретном научном исследовании всегда бывает дан (известен) сначала только один — причина или следствие. Другими словами, сначала бывает дано (известно) какое-то событие, которое можно описать в высказывании, и встает задача отыскать другое событие, считаемое его причиной или его следствием. Но из высказывания, фиксирующего данное событие, и из принципов детерминизма логически вывести искомую причину или искомое следствие невозможно, ибо речь идет не о логических следствиях, а о событиях, которые по самой постановке проблемы отыскиваются эмпирическим исследованием или иными методами, не сводимыми к дедукции из упомянутых предпосылок. Когда же искомые причина или следствие найдены, то дедукция в данной области науки осуществляется не из рассматриваемых принципов, а из полученных высказываний о причинно-следственном отношении событий. При записи же рассматриваемых принципов на языке логики для известного и для искомого употребляются однородные переменные символы, т. е. в приложении к конкретному научному исследованию предполагается данным то, чего еще нет.

Возьмем, например, такой принцип детерминизма: «Все a и некоторые b таковы, что b есть причина a», где a и b суть переменные, области значения которых суть эмпирические события. В применении к конкретному научному исследованию этот принцип попадает в такую ситуацию. В начале исследования известно какое-то конкретное событие x, для которого можно согласно данному принципу найти причину. Но при этом мы можем пока заполнить место только одной переменной a, поскольку имеется высказывание, описывающее событие x. Но из этого высказывания и данного принципа детерминизма невозможно логически вывести высказывание, описывающее искомую причину x, т. е. невозможно найти высказывание, заполняющее место другой переменной b и удовлетворяющее понятию причины. Причина события x должна быть найдена независимо от этого принципа. Последний тем более оказывается бесполезным для дедукции в данной области науки, если обнаруживается причина для x (допустим, y). Теперь в рассуждениях будет фигурировать высказывание «y есть причина x».

Принципы детерминизма играют в науке роль, существенно отличную от соображений дедукции. Это — своего рода советы исследователям строить свое исследование в определенном стиле, в определенном направлении. Это — ориентиры исследования, рекомендации и пожелания. Отыскание причин и следствий эмпирических событий дает удобное средство ориентации людей в мире, и строить научное исследование в этом духе в ряде случаев полезно и желательно.

На языке логики принципам детерминизма придают вид $(K^1x)\ (K^2y)\ (K^3z)\ldots\ (K^nv)\ R\ (x,\ y)$, где $K^1,\ K^2,\ \ldots,\ K^n$ суть кванторы «все» и «некоторые» в каких-то комбинациях, буквы x и y суть переменные, область значения которых образуют события, находящиеся в причинно-следственном отношении, R есть предикат «причина» или «следствие», буквы $z, \ldots, v$ суть переменные, область значения которых образует указание времени, области пространства, условий и т. п. (какие-то из $K^3z,\ \ldots,\ K^nv$ могут отсутствовать).

Однако экспликация фактически встречающихся и возможных утверждений о причинно-следственных отношениях событий в данном случае является иллюзорной. Дело в том, что квантор «некоторые» при этом в соответствии со сложившимся в логике предрассудком рассматривается как квантор существования и смешивается с предикатом существования. Так, принцип «Все x и некоторые y таковы, что y есть причина x» рассматривается фактически как «Для всякого x существует y такое, что y есть причина x». Но существование может быть актуальным и потенциальным, что совершенно не учитывается в рассматриваемой записи. Так, принцип «Для всякого x возможно y такое, что y есть следствие x» при этом не может быть выражен достаточно адекватно. А если учесть, что экспликация предиката R («причина», «следствие») приводит так или иначе к условным связям высказываний, то вопрос о различении актуального существования и потенциального существования (возможности, необходимости) приобретает первостепенное значение. И квантификация времени здесь не решает дела. Тем более здесь остается неясной еще одна сторона дела.

Возьмем, например, два принципа: «Для всякого события существует его причина» («Ничто не происходит без причины») и «Для всякого события может быть обнаружено другое событие, являющееся его причиной». Различие их очевидно. В частности, можно принять первый, отвергая второй (при соответствующем определении причины). В рассматриваемой записи это различие не может быть выражено. И тем более здесь ускользает от внимания вопрос о целесообразности или нецелесообразности поисков причин и следствий данных событий. Но именно эти аспекты проблемы представляют более важный интерес, чем рассмотрение возможных вариантов принципов детерминизма в рассматриваемом духе.

На уровне логики принципы детерминизма и индетерминизма различаются тем, что первые не содержат отрицаний (или отрицания из них могут быть исключены по правилам логики), а вторые суть отрицания первых (и отрицание из них по правилам логики исключить нельзя). Например, принципу детерминизма «Для всех x существует y такое, что y есть причина x» соответствует принцип индетерминизма «Не для всех x существует y такое, что y есть причина x». Однако поставим опять-таки вопрос о том, что будут значить принципы индетерминизма для ученого, занятого исследованием эмпирических событий. При этом обнаруживается, что принципы индетерминизма не могут играть даже роли пожеланий и советов строить исследование определенным образом, как это допустимо в отношении принципов детерминизма.

В конкретном научном исследовании индетерминизм имеет лишь один разумный смысл с логической точки зрения, а именно если он означает отказ исследователя искать причины событий или следствия их, т. е. намерение исследователя поступать как-то иначе. Чем мотивирован этот отказ, этот вопрос никакого отношения к принципам индетерминизма не имеет. Отказ исследователя рассматривать изучаемую им область мира с точки зрения причинно-следственных отношений вовсе не означает того, что исследователь признает какие-то принципы индетерминизма.

Исследователь может принимать, например, принцип, согласно которому для всякого эмпирического события может быть найдена причина, но в каких-то ситуациях отказывается от выяснения причин событий. Исследователь может также принимать, например, принцип, согласно которому имеются беспричинные события или имеются события, лишенные следствий, но в каких-то ситуациях все же рассматривать причинно-следственные отношения. Короче говоря, о принципах индетерминизма уместно говорить в той лишь мере, в какой уместно считать принципом отказ следовать какому-либо принципу. Вопрос же об индетерминизме вообще имеет нетривиальный интерес в таком аспекте, в каком он вообще не может быть учтен рассматриваемым способом экспликации принципов детерминизма и индетерминизма.

Какое отношение к детерминизму и индетерминизму имеет вероятность предсказаний, зависит всецело от соглашений. Это обстоятельство образует еще один источник для терминологической неразберихи. В случае вероятностных предсказаний вместо высказываний вида «Если X, то Y в отношении R к $\downarrow X$» фигурируют высказывания вида «Если X, то Y с вероятностью α в отношении R к $\downarrow X$». Это — совсем иной аспект дела. Принципы детерминизма, указанные для высказываний первого вида (без вероятностей), можно обобщить и на высказывания второго вида (с вероятностями) так, что можно будет оказаться детерминистом, принимая вероятностные предсказания, и индетерминистом, допуская возможность точных (с вероятностью 1) предсказаний в любых ситуациях.

§ 19. Эвристические допущения

Рассмотренные выше принципы детерминизма относятся к числу особого рода допущений, которые мы называем эвристическими. Эти допущения характеризуются такими чертами:

1. Они являются внелогическими допущениями. С логической точки зрения они выполнимы, но не являются логически истинными.

2. Они не могут быть подтверждены или отвергнуты эмпирически.

3. Они говорят о возможности или невозможности построить какие-то знания в данной области науки, но не опре-

деляют эти знания конкретно, т. е. в терминах данной науки. С этой точки зрения они не расширяют дедуктивную базу данной науки, но лишь ориентируют исследование в некотором направлении.

4. Они должны быть построены так, чтобы не получались логические противоречия по их вине.

5. Не существует никаких логических критериев предпочтения одних эвристических допущений другим, за исключением случаев, когда между ними самими возможно установить дедуктивные отношения.

Приведем еще несколько примеров эвристических допущений: пространство бесконечно, пространство конечно, время бесконечно, пространство прерывно, пространство непрерывно, время прерывно, время непрерывно, имеются минимальные временные интервалы, время делимо бесконечно, изменение непрерывно, эмпирические связи непрерывны и т. п.

Указанное в 3 пункте свойство эвристических допущений видно из такого примера. Для представителя конкретной науки допущение непрерывности изменения применительно к данному изменению $x \Rightarrow y$ означает, что может быть найдено какое-то промежуточное состояние между $\downarrow x$ и $\downarrow y$, но описание этого состояния из X, Y и принятого допущения логически не следует. Другими словами, это допущение не дает возможности предвидеть допускаемое состояние в терминах данной науки.

К числу эвристических допущений относятся общие утверждения, именуемые общими законами природы. Это, например, утверждения «Всякое качественное изменение есть следствие количественных изменений», «Природа непрерывна», «Всякие природные процессы не кончаются мгновенно (имеют некоторую инерцию)» (на этом основывается экстраполяция), «Природа не делает скачков» (на этом основывается интерполяция), «Все происходит скачкообразно», «Всякие природные процессы рано или поздно затухают (прекращаются)», «Всякий прогресс рано или поздно достигает предела», «Все объекты в природе упорядочены», «В природе господствует хаос» и т. д.

От эвристических допущений надо отличать такие, которые противоречат эмпирическим фактам. Принятие их оправдывается тем, что благодаря им становится возможной дедукция в данной области науки и получаются нужные следствия. Эти допущения в своей основе суть абстракции, т. е.

решения не принимать во внимание какие-то признаки исследуемых объектов или принимать во внимание только такие-то признаки объектов. Например, все объекты данного класса могут приниматься как различающиеся только по положению в пространстве, как абсолютно независимые друг от друга и т. п. Очевидно, намерения исследователя не имеют значений истинности. Их нельзя подтвердить или опровергнуть. Их можно только оправдать или нет в зависимости от их последствий. Но из намерений нельзя делать выводы. Поэтому им придают форму высказываний и считают истинными. И хотя они сами по себе могут быть заведомо ложными, неопределенными и даже непроверяемыми, получаемые с их помощью следствия могут считаться истинными.

§ 20. Эвристические правила

Эвристические допущения, будучи присоединены к утверждениям науки, не расширяют ее дедуктивную базу. Последняя может быть расширена другим путем — путем принятия особых эвристических правил, расширяющих класс правил вывода. К числу таких правил относятся общеизвестные правила генерализации (построения высказываний вида $(\forall a)\ X$), называемые также правилами индукции.

Пусть высказывание $(\forall a)\ X$ не может быть получено из высказываний $Y^1, \ldots, Y^n$ по правилам логического следования. В некоторых случаях, однако, признав истинность $Y^1, \ldots, Y^n$, признают истинным и $(\forall a)\ X$. При этом люди иногда угадывают, что $(\forall a)\ X$; иногда со временем убеждаются, что $\sim (\forall a)\ X$, и принимают соответствующие меры; иногда с самого начала знают, что $\sim (\forall a)\ X$, но игнорируют это. Но при всех обстоятельствах они принимают $(\forall a)\ X$ и действуют с ним в соответствии со свойствами квантора общности. Эти случаи и образуют индуктивную генерализацию.

Простейший случай такой генерализации — полная индукция. Известны такие ее формы. Примитивная индукция: если высказывание X истинно в отношении индивидов $s^1, \ldots, s^n$ класса Ks и при этом $s^1, \ldots, s^n$ исчерпывают класс Ks, то $(\forall s)\ X$.

Индукция через деление: если $s^1, \ldots, s^n$ образуют деление s, и при этом X истинно в отношении всех s^1, ..., всех s^n, то $(\forall s)\ X$.

Рекурсивная индукция: 1) в класс Ks включаются только $s^1, \ldots, s^n$ и $s_1, \ldots, s_m$ (последние при том условии, что в Ks включаются $s^{*1}, \ldots, s^{*k}$); 2) если X истинно в отношении всех s^1, ..., всех s^n, и если из признания того, что X истинно в отношении всех s^{*1}, ..., всех s^{*k}, следует, что оно истинно в отношении всех s_1, ..., всех s_m, то $(\forall s)\ X$.

В случае математической индукции предполагается (допускается или усматривается из свойств объектов) возможность упорядочить индивиды Ks и построить утверждение $(s^n \leftarrow P) \rightarrow (s^{n+1} \leftarrow P)$, где s^n есть любой индивид. Если истинно $s^1 \leftarrow P$ и только что приведенное утверждение, то истинно $(\forall s)\ (s \leftarrow P)$.

Приведенные схемы сами являются правилами получения высказываний $(\forall a)\ X$ из тех данных, которые указаны в них. И никакого обоснования их не требуется, кроме ссылки на интуитивное понимание квантора $\forall$. Суть всех этих правил с точки зрения «обоснования» тривиально проста: если нам как-то удалось установить, что высказывание X истинно в отношении всех индивидов класса s, то мы принимаем как истинное высказывание $(\forall s)\ X$.

Если число индивидов данного класса бесконечно или таково, что практически невозможно пересмотреть все их, а использование методов полной индукции исключено, то используется так называемая неполная, эмпирическая или вероятностная индукция. Известны различные формы ее. Количественная индукция: 1) если число случаев, когда $s \leftarrow (X\downarrow)$, достаточно велико, и при этом не встречаются случаи, когда $s \leftarrow (\sim X\downarrow)$, то $(\forall s)\ X$ считается истинным (популярная индукция); 2) если вероятность того, что $s \leftarrow (X\downarrow)$ достаточно велика, то $(\forall s)\ X$ считается истинным (частотная индукция).

Но когда именно имеет место указанное выше «достаточно», зависит от обстоятельств. Никакие логические критерии здесь не формулируются. Играют роль опыт и удача. Может случиться так, что исследователь «наткнулся» на такой s, что $(\forall s)\ X$, хотя он и рассмотрел всего несколько примеров s. Но может случиться так, что исследователь пересмотрел огромное число s, построил $(\forall s)\ X$, а потом нашли s такой, что $s \leftarrow (\sim X\downarrow)$. Кроме того, встречаются случаи, когда заведомо известно, что возможно $s \leftarrow (\sim X\downarrow)$, но оперируют с $(\forall s)\ X$ как с истинным.

Условная индукция: если $s \leftarrow (X\downarrow)$ в некоторых данных условиях, то $(\forall s)\ X$ считается истинным в этих условиях.

Здесь эффект зависит от точности, полноты и т. п. учета условий. Здесь можно сформулировать довольно четкий принцип: «Если истинно $s \leftarrow (X\downarrow)$, то возможно установить (зафиксировать) такие условия, что в этих условиях $s \leftarrow (X\downarrow)$ всегда истинно, т. е. $(\forall s)\ X$». Этот принцип теоретически безупречен. Но в практическом исполнении его эффект опять-таки зависит от обстоятельств. Так, высказывание «Человек может стать императором Франции» истинно в отношении Наполеона I; можно (в принципе) перечислить условия, необходимые для этого; в этих условиях (при наличии их) это высказывание будет истинно для всех людей; только эти условия повторимы далеко не всегда и не для всех людей. В практическом применении названного принципа всегда действует здравый смысл, вводящий ограничения на характер X и на описание условий, когда $s \leftarrow (X\downarrow)$.

Условно-количественная индукция: выбираются произвольные элементы Ks (минимум два); если при достаточно большом числе случаев и достаточном разнообразии их условий (крайний вариант — взаимоисключающие условия) истинно $s \leftarrow (X\downarrow)$, то $(\forall s)\ X$ считается истинным.

Индукция по различию: если индивиды $s^1, \ldots, s^n$ класса Ks достаточно различны и при этом истинны $s^1 \leftarrow (X\downarrow), \ldots, s^n \leftarrow (X\downarrow)$, то $(\forall s)\ X$ считается истинным. Индукция по сходству: если истинны $s^1 \leftarrow (X\downarrow), \ldots, s^n \leftarrow (X\downarrow)$, все индивиды $s^1, \ldots, s^n$ достаточно сходны, а в Ks включаются только $s^1, \ldots, s^n$ и такие индивиды, которые с ними достаточно сходны, то $(\forall s)\ X$ считается истинным.

От индуктивной генерализации отличается вид генерализации, которую можно назвать дефинитивной. Она не является эвристической операцией. Схема ее такова: 1) эмпирически установлено, что X истинно в отношении некоторых индивидов класса Ks; 2) принято определение $a = Df\ s\downarrow X$; 3) по правилам теории терминов имеем $(\forall s)\ ((s\downarrow X) \leftarrow (X\downarrow))$, откуда получаем $(\forall a)\ X$. При этом $(\forall a)\ X$ принимается как следствие намерения исследователя называть термином именно такие объекты, что $(\forall a)\ X$.

Редукционная индукция: если собственные следствия $(\forall s)\ X$ истинны, если число их достаточно велико и если они достаточно важны, то $(\forall s)\ X$ принимается за истинное. Очевидно, что эти «достаточно велико» и «достаточно важны» точно так же имеют внелогическую природу, зависят от условий, подвержены колебаниям и т. п. Предельный случай — следствия точно определены, и возможности получения их с помощью $(\forall s) X$ достаточны для признания последнего за истинное.

Возможны два варианта редукции. Сильный вариант: если из $(\forall s) X$ получается по крайней мере одно неистинное следствие, то оно не является истинным. Слабый вариант: из $(\forall s) X$ могут получаться неистинные следствия; но если они не играют существенной роли (ими можно пренебречь), то $(\forall s) X$ может быть принят за истинное. В этом случае встает вопрос о «весе» (о важности) следствий. Если «вес» истинных следствий из $(\forall s) X$ оценивается числом α, а неистинных — числом β, то в зависимости от соотношения α и β решают, считать его истинным или нет.

§ 21. Методы исследования

Выражение «методы исследования» не является строго определенным. Но мы не собираемся его уточнять, ибо не видим в этом особой надобности. Ограничимся лишь следующим пояснением.

Говоря о методе исследования, имеют в виду: 1) совокупность действий исследователя, которые он предпринимает, чтобы в заданных условиях исследования решить заданную научную проблему; 2) эти действия более или менее стандартны. Решить научную проблему — значит найти признаки данных объектов, измерить величину данных признаков объектов, осуществить сравнение, найти подходящее определение термина, доказать или опровергнуть заданное утверждение, вывести возможные следствия из данных утверждений и т. д. Условия исследования — все то, что имеется в распоряжении исследователя для решения данной проблемы (например, возможность или невозможность наблюдать объект, возможность повторять эксперимент, данная совокупность высказываний, истинность которых установлена, и т. д.).

При описании метода исследования не предполагается то, что при решении заданной проблемы в заданных условиях применение его даст непременно положительный однозначный результат. Один и тот же метод может быть использован в разных условиях и для решения разных проблем, а в одних и тех же условиях и для решения одних и тех же проблем могут быть использованы разные методы. Метод исследования не есть алгоритм (в математическом смысле).

Но не в том смысле, что они вообще не имеют точек соприкосновения, а в том смысле, что описание метода исследования не есть описание алгоритма.

На языке логики методы исследования, естественно, охватываются лишь в той мере, в какой это позволяет сделать имеющийся в ее распоряжении аппарат понятий. Не случайно поэтому в логике оказалось хорошо разработанным учение о дедуктивном методе (включая учение об аксиоматическом и гипотетико-дедуктивном методе). Ниже мы рассмотрим три других примера, на которых можно показать, как выглядят методы исследования с точки зрения логики и каковы пока реальные возможности логики на этот счет.

§ 22. Исследование эмпирических систем

Основная проблема исследования эмпирических систем — отыскание таких простых и непосредственных связей, из высказываний о которых можно было бы получать высказывания о любых сложных и косвенных связях данной системы, а также изобретение правил для этого. Две операции при этом представляют интерес — изоляция отдельных связей (анализ системы) и объединение (синтез) их в сложные связи.

Анализ системы характеризуется понятием изолированной связи. Пусть высказывание $\downarrow(R)\ X \Leftarrow f\downarrow(Y,\ Z)$ фиксирует зависимость объекта a, фигурирующего в X, от объектов b и c, фигурирующих соответственно в Y и Z; R означает положение $\downarrow X$ относительно $\downarrow Y$ и $\downarrow Z$. Осуществить анализ данной системы — значит построить два высказывания $\downarrow(R^1)\ X \Leftarrow f^1 \downarrow(Y^*,\ Z)$ и $\downarrow(R^2) X \Leftarrow f^2\ (Y,\ Z^*)$, где Y^* и Z^* суть какие-то допущения относительно b и, соответственно, c. В частности, Y^* и Z^* могут быть высказываниями о том, что соответствующие объекты не изменяются, не существуют, не влияют на другие объекты и т. п.

Под синтезом изолированных выше связей в систему мы имеем в виду отыскание таких правил, благодаря которым становится возможным высказывание $\downarrow(R)\ X \Leftarrow f\downarrow(Y,\ Z)$ получить из $\downarrow(R^1)\ X \Leftarrow f^1\downarrow(Y^*,\ Z)$ и $\downarrow(R^2)\ X \Leftarrow f^2\ (Y,\ Z^*)$ логически. Отыскание таких правил означает принятие некоторых допущений относительно данной системы. Так, в данном примере это может быть допущение того, что характер воздействия b на a не зависит от того, имеется при этом c или нет; аналогично для c. Классический пример такого синтеза — правило параллелограмма сил в механике.

Существенную роль в исследовании эмпирических систем связей играют принципы, регламентирующие последовательность рассмотрения объектов и связей, выбор исходного пункта для этого, отыскание исходных понятий и утверждений и т. д. В логической терминологии соответствующие вопросы разработаны слабо. И причина этого состоит не столько в том, что логики мало занимались ими, сколько в самих этих вопросах: решение их зависит от особенностей исследуемой системы и составляет элемент исследования в этой области, а не в области логики. Те же общие схемы и рекомендации, которые логика в настоящее время способна сформулировать на этот счет, имеют весьма ничтожное эвристическое значение.

§ 23. Модели

Слово «модель», как и множество уже рассмотренных выше слов, употребляется в различных смыслах. Мы слово «модель» будем употреблять в таком смысле. Пусть требуется исследовать предметы некоторого класса Ka (это может быть и индивидуальный предмет), т. е. требуется получить какие-то высказывания об этих предметах, удовлетворяющие определенным требованиям. Эта задача может быть решена двояко:

1) исследуются сами представители этого класса предметов (сам этот предмет) a;

2) подбираются (или создаются, в частности) какие-то другие предметы класса Kb, которые исследуются вместо предметов a, и затем из высказываний, полученных здесь, получаются по определенным правилам высказывания, относящиеся к предметам a.

$D1$. Предметы a суть предметы-оригиналы относительно предметов b, а предметы b суть предметы-модели относительно предметов a.

Таким образом, модель есть предмет, который исследуется вместо другого предмета с целью получения каких-то знаний о последнем. Эта роль модели обусловливает то, что она подбирается или создается определенным образом. А именно модели подбираются так, чтобы имели место функции $\downarrow X^i \Leftarrow f^i(\downarrow Y^i)$, где Y^i ($i = 1, 2, \ldots$) суть высказывания, получаемые при исследовании моделей, а X^i суть высказывания, относящиеся к предметам-оригиналам и удовлетворяющие некоторым заранее принятым требованиям. Функции f^i суть правила замены терминов, относящихся к предметам-моделям, на термины, относящиеся к предметам-оригиналам. Получение X^i из Y^i по этим правилам ничего общего не имеет с умозаключением по аналогии; поскольку здесь модели специально подбираются так, чтобы эти правила имели силу. Очевидно, о предметах-оригиналах и предметах-моделях должны иметься какие-то предварительные знания, чтобы была априорная уверенность в возможности получения и пригодности X^i. Встречающиеся в таких случаях неудачи не меняют существа дела.

§ 24. Теории

Слово «теория» употребляется в разных смыслах. Мы здесь выделим лишь один из них, при котором теория рассматривается как метод получения новых знаний.

Пусть задана некоторая область науки и как-то заданы классы высказываний A и B, относящихся к этой области науки. Пусть X есть непустое множество универсальных высказываний.

$D1$. Если из X и истинных высказываний, относящихся к A, достаточно регулярно получаются истинные высказывания, относящиеся к B, и при этом для получения их достаточно правил оперирования с высказываниями и терминами, то будем говорить, что X играет роль теории (есть теория) по отношению к A и B.

Предполагается, что получить высказывания B из A без X чисто логическим путем невозможно или возможно лишь в небольшом числе случаев, не представляющих практической ценности. Иначе X теряет практический смысл. Если $A^1, \ldots, A^n$ суть высказывания, принадлежащие к классу A, а B^* — к классу B, то получение B^* из $A^1, \ldots, A^n$ посредством теории X означает, что верно

$$A^1 \cdot \ldots \cdot A^n \cdot X \to B^*,$$

но неверно

$$A^1 \cdot \ldots \cdot A^n \to B^*.$$

Мы определили теорию так, что даже отдельно взятое универсальное высказывание может приобрести функции теории. Это не согласуется с представлением о теории, которое сложилось на основе наблюдения таких выдающихся образцов научного творчества, как ньютоновская механика, гидродинамика, электродинамика, теория относительности, квантовая механика и т. п. Согласно этому представлению не любые комплексы универсальных высказываний, выполняющие указанные в $D1$ функции, считаются теориями, но лишь привилегированные. Стоит, однако, принять какое-то общее определение теории, как в число теорий непременно попадет комплекс высказываний терминов, совсем непохожий на упомянутые образцы.

Изобретение и разработка теорий — творческий процесс, зависящий от конкретных условий в той или иной науке, от целей их изобретения, от традиций, моды, способностей и вкусов изобретателей и т. п. При этом используются не только правила логики и математики, но и другие самые разнообразные (в принципе — любые) средства науки вплоть до наблюдений и экспериментов. Так что сформулировать нетривиальные правила изобретения теорий в рамках логики вряд ли возможно. Самое большее, что здесь можно сделать (во всяком случае пока), это разработать достаточно четкую и однозначную терминологию, с помощью которой можно вести осмысленные разговоры о теориях, и распространить общие принципы логики на теории, которые суть сложные комплексы терминов и высказываний. Ниже мы сделаем по этому поводу несколько замечаний, но не с целью дать читателю некую теорию теорий, а с целью проиллюстрировать общую ориентацию логики и высказать несколько чисто негативных соображений на этот счет.

$D2$. Высказывания и термины, входящие в данную теорию, разделяются на исходные (первичные) и производные. Исходные высказывания принимаются как нечто данное, производные же выводятся посредством исходных. Исходные термины не определяются друг через друга и через другие термины теории. Они входят в исходные высказывания. Через них определяются прочие термины теории.

Различение, указанное в $D2$, не означает, что во всех случаях построения теорий сразу задаются все исходные термины и высказывания. Теория может создаваться так, что не накладывается никаких априорных ограничений на число исходных терминов и высказываний, и последние могут вводиться по мере надобности в ходе развертывания теории. Такого рода теории можно назвать открытыми в отличие от закрытых, у которых исходный базис как-то ограничен.

С точки зрения строения к теориям помимо того, что указано в $D1$, предъявляют еще требование, чтобы термины и высказывания, образующие ее, были связаны отношениями логического следования и определения. Можно, конечно, такое требование принять. Но оно ничуть не исключает случай, когда все термины и высказывания теории являются исходными, а множество производных пусто.

$D3$. Высказывания, выводимые только из исходных утверждений теории, суть внутренние следствия теории, а выводимые из исходных утверждений с помощью каких-то других утверждений, не входящих в эту теорию, — внешние. Аналогично термины, определяемые только через исходные термины теории, суть ее внутренние производные термины, а определяемые посредством терминов, не входящих в эту теорию, — внешние.

Вопрос о том, включать или не включать внешние универсальные следствия и внешние производные термины в структуру данной теории, принципиальной роли не играет. Практически в науках складываются конструкции, содержащие универсальные внешние и внутренние следствия исходных утверждений (а также внешние производные термины) и рассматриваемые в качестве теорий.

$D4$. Теория считается логически непротиворечивой, если и только если в ней не получаются противоречивые следствия (внешние и внутренние).

Логически противоречивые теории в науке встречаются и используются. Это возможно лишь постольку, поскольку в них содержатся непротиворечивые фрагменты, позволяющие получать истинные высказывания. Но вообще обнаружение логических противоречий в теориях является стимулом к их усовершенствованию.

$D5$. Исходное утверждение теории не зависит от остальных ее исходных утверждений, если и только если его нельзя получить как следствия остальных. Исходный термин не зависит от других исходных терминов теории, если и только если он не определяется через них. Обнаружение зависимости одних исходных утверждений (терминов) от других является стимулом к «минимизации» исходных элементов теории. Однако зависимость их не ведет сама по себе к недоразумениям, подобным последствиям логической противоречивости.

*D*6. Задано какое-то множество высказываний, и теория считается полной или неполной (с какими-то дополнительными определениями вроде «интуитивно», «эмпирически», «апостериорно» и т. п.) в зависимости от того, все или не все заданные высказывания могут быть получены посредством этой теории (здесь мыслимы градации в зависимости от того, имеются в виду только внутренние или любые следствия теории).

*D*7. Заданы какие-то априорные требования, которым должны удовлетворять высказывания данной области науки; и в зависимости от того, все или не все высказывания, удовлетворяющие этим требованиям, получаются посредством данной теории, последняя расценивается как полная или неполная (с некоторым ограничением вроде «дедуктивно», «априорно» и т. п.).

Между теориями имеют место различные взаимоотношения. Частично они определяются как отношения классов получаемых в них посредством их высказываний и представляют собой обобщения обычно рассматриваемых в логике отношений аксиоматических систем.

*D*8. Одна теория включается в другую, если и только если каждое следствие первой есть также следствие второй. Две теории равносильны, если каждая из них включается в другую.

Аналогично можно определить другие отношения (объединения, совместимости и т. д.). Однако взаимоотношения теорий этим не исчерпываются. В частности, встречаются такие отношения. Пусть A есть высказывание, полученное посредством X^1, а B — посредством X^2. Пусть оба A и B находятся в диапазоне истинности относительно одного и того же объекта. Однако одно из них оценивается как более точное, менее точное или столь же точное. Аналогичное сравнение возможно для других следствий X^1 и X^2, а из их совокупности складывается некоторая суммарная оценка сравнительной точности теорий. Из сравнения множеств следствий и степеней их точности получаются более сложные отношения.

*D*9. Одна теория расценивается как частный случай другой, если какие-то исходные термины первой суть видовые термины соответствующих терминов второй, а в остальном они не различаются.

Теории изобретаются для того, чтобы получать нужные знания, не прибегая к эмпирическим исследованиям (как замена последних). В конечном итоге совпадение высказываний, получаемых посредством теорий, с эмпирическими данными оправдывает теории или заставляет их отбросить как неэффективные или даже ведущие к ошибочным результатам. Если обнаруживаются такие случаи, что получаемые в теории или посредством теории высказывания не совпадают с результатами эмпирических исследований (оказываются вне диапазона истинности), то сложившаяся ситуация не образует никакого логического противоречия. Иногда эти несовпадения приобретают вид парадоксов.

Формальная система не есть теория, поскольку в формальной системе нет терминов и высказываний. Теория может получиться лишь благодаря интерпретации формальной системы, при которой ее объекты рассматриваются как термины, высказывания и логические операторы.

Когда говорят о формализации теории, то часто имеют в виду совершенно различные вещи: 1) отвлечение от смысла терминов теории с целью исследования ее логических достоинств; 2) аксиоматизацию; 3) изобретение такой формальной системы, в результате интерпретации которой получилась бы теория, равносильная данной.

Между теориями, между теорией и формальной системой и между формальными системами могут быть установлены отношения модели и оригинала. Формальные системы являются очень удобными моделями для исследования некоторых свойств теорий (например, их непротиворечивости). Но все это зависит от обстоятельств. Теория же (в нашем смысле) не есть модель той предметной области, к которой относятся ее термины и высказывания.

Одна из функций теорий, сказали мы, есть осуществление прогнозов. При этом существенное значение имеет не вообще способность теорий прогнозировать, но качество самих прогнозов, их ценность с точки зрения ситуации в данной науке и вненаучных практических соображений. Поэтому и бывает так, что теории, позволяющие делать безошибочные прогнозы, оказываются бесполезными и необычайно скучными, а теории, позволяющие делать сбывающиеся предсказания лишь в каком-то проценте случаев, оказываются в высшей степени полезными и значительными.

§ 25. Методология частных наук

Логика едина для всех наук. Не существует и не может быть никакой особой логики для той или иной науки (физики, химии, истории, математики и т. д.), отличной от логики для других наук. Но деятелей частных наук интересуют не разговоры о науке вообще, а методологические проблемы своей науки, да к тому же выступающие для них в форме конкретных проблем этой науки. Так что нельзя ли в логике построить разделы, специально и непосредственно рассчитанные на интересы потребителя такого рода?

Конечно, кое-что здесь можно сделать. А именно следующее. Пусть дана некоторая наука с ее особыми методологическими проблемами. В логике можно выбрать такие разделы, которые более всего подходят к логическому типу методологических проблем этой науки. Изложить эти разделы можно на примерах понятий, утверждений, теорий и т. д. данной науки. Наконец, в логике какие-то разделы можно развить более детально и в таком направлении, чтобы это соответствовало интересам данной науки.

Мы ни в коем случае не отвергаем педагогическую и просветительную роль логики в упомянутом выше случае. Мы только хотим здесь обратить внимание на два обстоятельства. Пропаганда логики с целью сделать ее участником исследований в конкретных науках неизбежно сталкивается с дилеммой: если логика как наука общедоступна, она тривиальна и практически бесполезна; если же логика не тривиальна и может иметь серьезное научное значение, она доступна лишь сравнительно узкому кругу специалистов при условии значительных затрат ума и времени. И вряд ли можно рассчитывать на то, что эта дилемма будет решена массовым порядком.

Второе обстоятельство состоит в том, что сказанное выше об ориентации логики на интересы той или иной науки есть либо разработка логики как особой науки, либо разъяснение ее результатов особой группе лиц, работающих в некоторой частной науке, но еще не есть решение методологических проблем этой науки. Последнее может быть найдено не в терминах одной только логики, но в терминах самой этой науки. Решение методологических проблем физики, химии, истории, математики и т. д. есть исследование в области физики, химии и т. д.

Таким образом, особая методология той или иной конкретной науки есть часть этой науки. Но эта часть имеет ряд особенностей сравнительно с другими частями науки. Прежде всего методология конкретной науки не есть в таком же смысле локализованная часть науки, как, скажем, органическая химия есть часть химии, а оптика — часть физики. Она может быть разбросана по всей данной науке, да так, что собрать ее в одно место оказывается делом невозможным. Между прочим, фактическое положение ее было таким как в прошлом, так и сегодня. Это не дефект ее и не достоинство. Это ее натура. Возможны случаи, когда некоторая локализованная часть науки выполняет методологические функции в ней (например, такую роль в физике играла классическая механика и играет сейчас теория относительности), но это не есть общеобязательная норма.

Методология конкретной науки нужна (если она вообще нужна) для решения не обязательно всех проблем этой науки, а лишь для некоторых, может быть даже для решения одной-единственной проблемы. И ничего унизительного для нее в этом нет. Иногда целая наука может работать сотни лет, чтобы решить одну-единственную задачу, и этим существование ее будет оправдано, если эта задача стоит того.

По содержанию специальная методология той или иной науки есть совокупность исследований, включающая обработку языка данной науки (ее терминологии и утверждений), исследование, усовершенствование и изобретение ее теорий, выявление и исследование ее эвристических допущений, исследование, усовершенствование и изобретение ее эвристических правил и т. д., — т. е. вся та работа, которую выполняют так называемые теоретики данной науки (а не логики и методологи вообще). И результатом этой работы является совершенствование данной науки как системы знаний, а не конструирование особой систематически построенной методологии этой науки. Методология данной науки исчезает в теле самой науки, а не образует особое тело наряду с ней. Когда наряду с наукой вырастает еще особая наука, являющаяся ее методологией, это скорее признак неблагополучия этой науки или методологии науки (а возможно, и обеих), чем признак ее прогресса.

То, что систематически построенная методология всякой науки в той части, которая касается исследования терминов и высказываний, есть общая логика, это должно быть ясно из всего предшествующего изложения. Добавим к этому еще такие два обстоятельства, интересные и сами по себе.

Одна из задач частной методологии науки — выявление и исследование эвристических допущений относительно изучаемых в этой науке объектов. Например, это может быть допущение минимальных длин и минимальных интервалов времени или, наоборот, допущение того, что нет минимальных длин и нет минимальных интервалов времени; это может быть допущение того, что Вселенная замкнута, или противоположное допущение, что она не замкнута. Всякая наука полна такого рода эвристических допущений.

Теперь спрашивается, можно ли такой фрагмент методологии построить как единую по содержанию систему? Невозможно хотя бы потому, что здесь логически одинаково правомерны как допущения, так и их отрицания. Совместить же их в одной системе без противоречия нельзя. А отдать предпочтение одному члену противоречия тоже нельзя, ибо отсутствуют критерии для абсолютного и окончательного предпочтения. Да эта систематизация к тому же лишена смысла, ибо как система такая методология для науки вообще не нужна. Для науки нужны те или иные принципы в различных отделах и ситуациях в зависимости от условий. Не исключено, что для решения одной и той же проблемы одному ученому нужен некоторый принцип, другому — нет, а третьему даже нужен противоположный.

Но не будем входить в содержание методологических допущений, будем рассматривать их как предмет нашего внимания, т. е. встанем на точку зрения метанауки. Нельзя ли при этом методологические принципы той или иной конкретной науки сделать предметом исследования и тем самым построить особую методологию данной науки? Абстрактно говоря, можно. Но при этом испарится все то, что имеет специфический интерес для представителей данной конкретной науки. Останется просто логика, общая логика. И некоторые очень общие соображения вроде таких: отношение порядка может быть «раньше», «позже», «одновременно»; мы имеем дело с одним и тем же предметом, наблюдая предметы в разное время, если достаточно большое число признаков и определенных признаков у наблюдаемых совпадает и т. п. Эвристические допущения данной науки строятся на языке этой науки. И наибольший интерес в них имеет не логическое, а специфическое для данной науки содержание. И никакая метанаука здесь не решит дела.

В пользу тезиса о невозможности особой методологии той или иной конкретной науки на языке логики говорит и другое из упомянутых обстоятельств. Кажется естественным рассматривать сложные познавательные операции в надежде отыскать для них особые логические правила, отличные от правил для составляющих их простых операций, т. е. отыскать особые логические правила, специфически характеризующие данную науку. Однако логические операции обладают на этот счет одной особенностью сравнительно с другими действиями людей. Здесь любая самая сложная конструкция остается комбинацией из простых слагаемых, и не более (в силу самих абстракций, лежащих в фундаменте логики). Разделение же логических операций на простые и сложные всецело зависит от вида принимаемой теории логических правил и имеет смысл лишь при наличии особых определений простоты и сложности со ссылкой на эту теорию, т. е. есть дело сугубо логическое. Кроме того, на какие бы «простые» операции ни разлагалась та или иная «сложная» операция, ее всегда можно представить как «простую» (в один шаг) операцию, совершаемую по правилу, которое является производным от правил составляющих ее операций. Если это сделать нельзя, значит при осуществлении данной операции допущена логическая ошибка или она осуществлена не по правилам логики. Одним словом, наивно рассчитывать на то, что можно придумать какой-то особый сверхлогический аппарат, принципиально отличный от логического аппарата, сложившегося и складывающегося по тем направлениям, которые составляют фундамент современной логики.

§ 26. Логика микрофизики

Особенность свойств и условий исследования явлений микромира сравнительно со свойствами и условиями исследования явлений макромира произвели настолько сильное впечатление на значительную часть человечества, что стали даже говорить об особой логике микромира (логике микрофизики, логике квантовой механики), принципиально отличной от той привычной логики, которая сложилась на основе изучения явлений макромира.

Случай с микрофизикой не является единственным в своем роде. Стремление придать крупным научным открытиям вид переворота не только в представлениях людей о той или иной области действительности (этим теперь никого не удивишь!), но и в самих логических основаниях науки, является одной из характерных черт культурной среды, в которой развивается современная наука. Так что анализ ситуации с логикой микромира в некотором роде поучителен.

Мы здесь не будем касаться чисто логических исследований, которые лишь условно (по исторически данному источнику проблематики) можно обозначить термином «логика микромира» (или «логика квантовой механики»), и будем рассматривать только такие концепции логики микрофизики, которые имеют прямой и явно выраженный методологический смысл.

В логико-философской литературе известны две концепции, утверждающие особенность логики микромира сравнительно с логикой макромира (или логики квантовой механики сравнительно с логикой прочих разделов физики). Первая из них заключается в следующем. Логическая теория есть теория бытия, отражающая некоторые общие свойства мира. Одна логическая теория может быть истинной для одной части мира и неистинной для другой. Двузначная логика истинна для макромира, но не для микромира; для микромира вместо нее имеет силу особая трехзначная логика (трехзначная логика дополнительности).

Вторая из упомянутых концепций заключается в следующем. Логическая теория не является общей теорией мира. Она относится лишь к языку науки, в частности к языку микрофизики и языку макрофизики. Язык микрофизики подчиняется законам трехзначной логики, поскольку содержит высказывания, которые не являются истинными и не являются при этом ложными. Говорить об истинности и ложности высказываний правомерно лишь тогда, когда можно осуществить их проверку. Если последняя невозможна, высказывания не являются истинными и не являются ложными. Они в таком случае имеют третье значение истинности, скажем, неопределенны. К числу таких высказываний относятся, в частности, высказывания о ненаблюдаемых объектах. И если при оперировании такого рода высказываниями придерживаться привычных правил рассуждения, уместных в рассуждениях о макроявлениях, то возникают различного рода затруднения. Здесь нужны правила особой трехзначной логики.

Хотя рассматриваемые концепции различаются в понимании источника логики микромира, они не образуют альтернативы. Обе они допускают, что для микрофизики так или иначе нужна особая логика, отличающаяся от логики для макрофизики и других наук, изучающих макрообъекты. Так что желая выбрать правильную точку зрения в данном вопросе, мы не обязаны выбирать непременно одну из этих концепций. Здесь возможен еще один выход из положения, а именно такой: обе упомянутые концепции ложны, и никакой особой логики микромира (микрофизики, квантовой механики) не существует.

Утверждая, что микрофизика не обладает никакой логической исключительностью сравнительно с науками о макрообъектах, мы имеем в виду не совокупность статей и книг, объединяемых термином «логика микромира», — в этом смысле для любой науки можно сочинить любое количество страниц с логической терминологией, назвав их особой логикой этой науки. Мы имеем в виду совокупность логических правил (законов логики), которым следуют специалисты по микрофизике, если даже они не подозревают о том, что находятся в логически исключительном положении сравнительно с прочими физиками, довольствующимися обычной (привычной и т. п.) логикой.

В пользу тезиса, отвергающего логическую исключительность микрофизики,свидетельствуют как соображения, касающиеся природы законов (правил) логики, так и соображения, получаемые из анализа конкретной логической ситуации в микрофизике и особых логик, изобретаемых для ее описания.

Апелляция к свойствам бытия при обосновании особенности логики микрофизики лишена смысла. Можно, конечно, построить рассуждение так: логика отражает некоторые свойства действительности, опирается на онтологические обобщения; следовательно, различие свойств областей действительности (например, макромира и микромира) порождает различие систем логических правил для наук, изучающих эти области. Но можно рассуждение построить иначе: несмотря на различие свойств отдельных областей действительности, у них имеются некоторые общие свойства, отражаемые в правилах логики; таким образом, делить мир на сферы, требующие для своего отображения различных правил логики, нелепо. Как видим, ссылки на сферы бытия здесь абсолютно ничего не решают.

Логика вообще не есть теория бытия, и ее правила одинаковы для всех наук, к каким бы сферам бытия они ни относились. Различие сфер бытия (т. е. областей познания) сказывается на правилах логики лишь в том, что в разных ситуациях могут фигурировать термины и высказывания с различной логической структурой, т. е. могут употребляться различные логические операторы или различные их комбинации. Разумеется, при этом могут использоваться и различные правила логики. Но из этого никак не следует, что одно и то же правило логики в одной ситуации ведет к положительным результатам, а в другой к ошибкам. Если в какой-то области науки складывается ситуация, когда кажется, будто применение некоторых правил логики ведет к ошибкам, то это должно порождать не сомнение в универсальности этих правил и стремление построить особую логику для этой области науки, а стремление найти источник недоразумений в смешении различных логических операторов, в отсутствии должной их дифференциации или в неправильном (неуместном) их употреблении.

Что касается второй концепции, то здесь имеется более глубоко лежащее соображение. Верно, что логика относится к языку науки и не претендует на то, чтобы быть теорией мира. Верно и то, что высказывания квантовой механики можно рассматривать с точки зрения некоторой трехзначной логики. И все же эта концепция несостоятельна, как и первая.

Логическая ситуация в микрофизике считается из ряда вон выходящей потому, что в ней встречаются высказывания, которые не являются истинными и не являются ложными, т. е. обладают некоторым третьим значением истинности («неопределенно»). Кроме того, в микрофизике встречаются пары высказываний, которые связаны так, что если одно из высказываний истинно или ложно, то другое неопределенно (дополнительные высказывания).

Но факт трехзначности высказываний не является исключительной особенностью микрофизики, и идеи многозначной логики были известны в логике до возникновения квантовой механики. Но если бы даже случаи трехзначности высказываний встречались только в области микрофизики, это не давало бы повода для сомнений в универсальности законов логики. При этом произошло бы лишь то, что ситуация в микрофизике дала бы первоначальный стимул к разработке многозначной логики (чего, однако, не произошло на самом деле). Но правила трехзначной логики являются столь же универсальными, как и правила двузначной логики, независимо от того, встречаются вообще где-либо случаи для их применения или нет.

Аналогично обстоит дело с дополнительными высказываниями. Такого рода зависимости высказываний встречаются не только в микрофизике. Они встречаются буквально на каждом шагу, и люди в них не усматривают ничего логически необычного. Представим себе, например, такую ситуацию: два военачальника предлагают различные планы расположения войск, и каждый из них настаивает на том, что если войска расположить так, как предлагает он, то противник будет разбит. Если будет принят план одного из них, то только его суждение может быть эмпирически проверено (окажется либо истинным, либо ложным). Суждение же второго не может быть проверено эмпирически, поскольку прошлое невозвратимо. И любой ответ на вопрос о том, к чему привело бы принятие его плана, так и останется в сфере ни к чему не обязывающих предположений.

Но если бы даже дополнительные высказывания были исключительной привилегией микрофизики, обнаружение их не ведет ни к какому перевороту в способах рассуждения. Дело в том, что правила вывода (рассуждения) в любой области науки вообще не зависят от того, сколько значений истинности можно приписать высказываниям и какие между ними имеются отношения по их значениям истинности. При осуществлении выводов во внимание принимается лишь видимое (или слышимое) строение высказываний, — наличие в них определенных логических операторов и расположение терминов, высказываний и логических операторов в посылках рассуждений. Значения же истинности высказываний принимаются во внимание лишь для того, чтобы принять заключения, если принимаются посылки, или отвергнуть посылки, если оказываются неприемлемыми заключения (т.е. применить основной принцип дедукции). При этом достаточно оперировать лишь одним значением «истинно» и его отрицанием, зачисляя все значения, отличные от истинности, в класс неистинных. Так что если в число посылок попадает неопределенное высказывание, это никак не повлияет на логическую картину рассуждений. Это высказывание будет просто зачислено в класс высказываний, которые нельзя признать истинными, — факт, не имеющий отношения к правилам логики (внелогический). И в данной ситуации основной принцип дедукции не может быть использован, что ровным счетом ничего не говорит об ошибочности этого принципа, о непригодности каких-то правил вывода или о необходимости замены последних какими-то новыми.

Использование трехзначной логики для описания логической ситуации в квантовой механике не является обязательным. Ее вполне можно описать и в двузначной логике. В самом деле, пусть основные значения истинности суть «истинно» и «неистинно», а операторы $\sim$ («не»), $\cdot$ («и») и $\vee$ («или») суть двузначные операторы. Пусть A есть высказывание «Объект a наблюдаем» (например, «Импульс частицы α измерим»), B есть высказывание «Объект b наблюдаем» (например, «Координаты частицы α измеримы»), X есть высказывание «a имеет признак p» (например, «Импульс частицы α есть величина s»), Y есть высказывание «b имеет признак q» (например, «Координаты частицы α суть величины t»). Примем следующие правила приписывания значения «истинно» и «ложно» высказываниям X и Y (высказывания A и B, очевидно, двузначны, и проблемы в отношении их нет): 1) X истинно, если и только если $A \cdot X$; Y истинно, если и только если $B \cdot Y$; 2) X неистинно (ложно), если и только если $\sim A \vee A \cdot \sim X$; Y неистинно, если и только если $\sim B \vee B \cdot \sim Y$. Легко показать, что все правила двузначной логики при этом сохраняются. В частности, будут доказуемы утверждения

$$\sim(A \cdot X) \vdash \sim A \vee A \cdot \sim X, \quad \sim(B \cdot Y) \vdash \sim B \vee B \cdot \sim Y,$$
$$\sim(\sim A \vee A \cdot \sim X) \vdash A \cdot X, \quad \sim(\sim B \vee B \cdot \sim Y) \vdash B \cdot Y,$$
$$\vdash X \vee \sim X, \quad \vdash Y \vee \sim Y.$$

Дополнительные высказывания определяются тривиально просто: X и Y суть дополнительные высказывания, если и только если имеет силу утверждение «Если A, то $\sim B$; если B, то $\sim A$».

В рассмотренном сведении трехзначного описания к двузначному нет ничего удивительного: в силу принципа сводимости всех значений истинности к значению «истинно» любая ситуация в науке может быть описана в двузначной логике, если только она поддается описанию в какой-то многозначной логике. Употребление многозначной логики может лишь упростить или несколько изменить форму описания, но не его суть. Так, если X и Y суть дополнительные высказывания, то $X \cdot Y$ ложно в нашем двузначном варианте. В трехзначной логике конъюнкцию можно определить так, что $X \cdot Y$ будет неопределенно. Но с точки зрения рассуждений (выводов) это отличие никакой роли не играет: неопределенное высказывание не является истинным, и принимать вытекающие из него следствия за истинные нельзя.

Об особой логике для микрофизики речь идет как об особом наборе правил логики, специфическом для этой области науки. Естественно ожидать, что при этом будут сформулированы правила, пригодные для микрофизики и непригодные для макрофизики. Но ничего подобного не происходит на самом деле. В качестве особой логики микрофизики предлагается либо некоторое трехзначное матричное построение, либо некоторое сужение классических логических исчислений, т. е. исключение некоторых правил «обычной» логики из числа правил, приемлемых в области исследования микромира.

Сложился предрассудок, будто признание трехзначности (и вообще многозначности) высказываний ведет к тому, что не все законы «обычной» логики универсальны, поскольку не все законы двузначной логики (а она соответствует «обычной» логике) сохраняются в трехзначной (многозначной). Он базируется на таких операциях. В двузначной логике определяются логические операторы («и», «или», «не» и т. п.) с помощью таблиц истинности (т. е. правила приписывать значения истинности высказываниям с этими операторами), и затем в соответствии с этими определениями находятся выражения, которые всегда истинны. Они считаются законами логики. Таковы, например, законы исключенного третьего («X или не-X») и противоречия («Не- (X и не-X)»). В трехзначной логике логические операторы сохраняются те же самые, но таблицы, определяющие их, уже другие (хотя бы потому, что присоединяется третье значение). Эти трехзначные таблицы строятся так, чтобы имелась связь с двузначными (чтобы при исключении третьего значения получались двузначные таблицы), в результате чего получается иллюзия, будто приходится иметь дело с теми же самыми логическими операторами. Но вместе с тем трехзначные таблицы специально подбираются так, чтобы не все законы двузначной логики были законами в новых таблицах.

Трехзначные таблицы специально изобретаются такими, чтобы исключить некоторые законы двузначной логики, — этот решающий факт элиминируется. И вообще игнорируется другой не менее важный факт — возможность отыскать другие трехзначные таблицы, из которых точно так же можно получить обычные двузначные таблицы путем исключения третьего значения, но которые уже не будут исключать те же самые законы двузначной логики (как мы показали выше). В любой функционально полной многозначной логике для любых законов двузначной логики можно построить такие определения логических операторов, что эти законы сохранятся в многозначной логике, и такие определения логических операторов, что эти законы в данной многозначной логике не сохранятся.

Короче говоря, дело здесь обстоит не так, будто трехзначность высказываний ведет к тому, что некоторые законы двузначной логики отпадают. Дело обстоит так: по каким-то причинам хотят некоторые законы двузначной логики исключить, и для этого подбирают подходящий способ построения многозначной (в данном случае — трехзначной) логики. В результате вместо внесения ясности, к которой обязан стремиться логический анализ науки, получается смешение различных логических операторов и относящихся к ним законов логики, что ведет к мистификации довольно тривиальных вещей.

Проиллюстрируем сказанное на примере закона исключенного третьего, который исключается из числа законов особой логики микрофизики. Прежде всего следует сказать, что исключение этого закона не есть фатальное следствие допущения трехзначности высказываний, поскольку имеется возможность различных определений логических операторов. Но если даже имеется только одно-единственное определение логических операторов, соответствующее ситуации в микрофизике, остается следующее обстоятельство: определение отрицания, дизъюнкции и т. п. в трехзначной логике есть определение логических операторов, отличных от соответствующих операторов двузначной логики. И единственно правильный вывод в рассматриваемом случае можно сделать лишь такой: если α и β суть соответственно двузначные отрицание и дизъюнкция, а γ и δ — трехзначные, то возможны такие определения последних, что утверждение с α и β будет тавтологией, а утверждение с γ и δ — нет.

Само выражение «закон исключенного третьего» многосмысленно. Это может быть утверждение о том, что высказывание «X или не-X» есть тавтология при условии подходящих правил приписывания значений истинности высказываниям с логическими операторами «или» и «не». О судьбе такой тавтологии в случае многозначности высказываний мы уже говорили. Но это может быть также утверждение такого вида: «Всякое высказывание либо истинно, либо не является истинным». А это утверждение остается незыблемым в любой многозначной логике, поскольку во всех случаях значения истинности высказываниям приписывается так: либо высказывание имеет некоторое значение истинности, либо не имеет его (т. е. имеет какое-то другое). При этом даже такой случай, когда высказывание не является истинным и не является ложным, не содержит ничего особенного: просто при этом высказывание не является истинным.

Законом исключенного третьего называют также утверждение вида: «Всякое высказывание либо истинно, либо ложно». Если при этом ложность понимается не как отрицание истинности, а как рядовое значение и при этом допускаются другие значения наряду с истинностью и ложностью, то приведенное утверждение будет ошибочно по самим упомянутым соглашениям. Оно просто не является законом логики. Это утверждение может быть принято лишь в качестве частной гипотезы, как и любые другие гипотезы о числе значений истинности. Такого рода гипотезы не являются законами логики и не исключают друг друга. На их основе могут быть построены (и строятся) системы логических правил для различных классов высказываний — для двузначных, трехзначных и т. п. Принцип действия правил логики здесь выглядит так: если высказываниям приписываются такие-то значения истинности и если принимаются такие-то правила приписывания этих значений, то будут иметь силу такие-то логические правила.

Наконец, законом исключенного третьего называют утверждение вида «Либо X, либо не-X», которое принимается как аксиома или получается из некоторых аксиом как следствие. И это утверждение принимается как часть неявного определения логических операторов «или» и «не». И независимо от того, какие соображения лежат в основе принятия такого определения и какие могут быть возражения, факт остается фактом: раз принято решение употреблять знаки «или» и «не» так, что для любого высказывания X будет верно утверждение «Либо X, либо не-X», то никаких исключений из этого правила не может быть. Всякого рода «исключения» на деле означают лишь то, что эти операторы начинают употребляться в каком-то ином смысле.

Аналогично обстоит дело и с другими законами логики, исключаемыми из числа законов особой логики микромира, в частности с законом коммутативности конъюнкции. Закон этот разрешает в утверждениях вида «X и Y», где X и Y суть любые высказывания, менять местами X и Y (если истинно «X и Y», то истинно и «Y и X»; или из первого логически следует второе). Он либо принимается как часть неявного определения логического оператора «и», либо принимается в силу правил приписывания значений истинности высказываний с этим логическим оператором (либо из комбинаций того и другого). И если возникает сомнение в правомерности применения этого закона к каким-то высказываниям, то естественно усмотреть в этом не мистический переворот в логике, а тривиальное смешение оператора «и» с каким-то другим, очень похожим, возможно, на него, или неуместное его употребление. В частности, оператор «и» может быть спутан с логическими операторами типа «и затем», «и до этого» и т. п., для которых правило коммутации действительно не имеет силы, или употреблен вместо них.

Анализ природы законов логики, конкретной логической ситуации в микрофизике и вида ее особых логик показывает, что допущение особой логики микрофизики (микромира), отличной от логики макрофизики и других наук, есть чисто беллетристическое явление, основывающееся на смешении логических операторов и относящихся к ним логических правил. Мы при этом ни в какой мере не отвергаем пользы разработки многозначных (и, в частности, трехзначных) логических систем и исследования различного рода ограничений классической логики. Мы не отвергаем также возможной пользы всего этого для анализа языка микрофизики. Но все это не дает никаких аргументов в пользу особой логики микромира, отличной от логики наук, изучающих макромир.

§ 27. Классические и неклассические отношения высказываний

Ситуации такого типа, когда приходится иметь дело не с двумя возможностями, а с тремя, где третья возможность есть отрицание двух других, складываются не только в сфере сложной и утонченной науки, но и на примитивном житейском уровне.

Один человек спрашивает другого: «Перестал ли ты бить своего отца?» Согласно двузначной логике, другой должен ответить либо «да», либо «нет». И тот и другой ответ будет означать, что отвечающий раньше бил своего отца. А как быть, если он раньше не делал этого? Оперируя только одним отрицанием, проблему решить нельзя. Дело в том, что сложившаяся ситуация предполагает не только две возможности: «Я перестал бить своего отца» (X) и «Я не перестал бить своего отца» (Y), но также третью возможность «Я вообще (раньше) не бил своего отца» (Z). И верно будет не утверждение $X{:}Y$, а утверждение $X:Y:\ Z$, где Z может быть получено как внешнее отрицание обоих X и Y, т. е. будет верно $X:Y:\sim X\cdot\sim Y$. Пусть $P(s)$ есть «Я бил своего отца», $Q(s)$ — «Я сейчас бью (продолжаю бить) своего отца». В таком случае X есть $P(s)\cdot\neg Q(s)$, а Y есть $P(s)\cdot Q(s)$. По правилам логического следования будут верны $X:\sim X$ и $Y:\sim Y$, а не $X:Y$, и верно $\sim X\sim\sim Y\vdash\ \sim P(s)$.

Другой пример. Пусть X есть высказывание «N утверждает, что A», где A есть какое-то высказывание, а Y есть «N утверждает, что $\sim A$». Очевидно, утверждение $X:Y$ будет неверно, так как N может не утверждать как A, так и $\sim A$ (N вообще помалкивает). Верным будет лишь утверждение $X:Y:\sim X\sim Y$.

А между тем часто приходится наблюдать такую ситуацию. Участник дискуссии M обвиняет другого участника дискуссии N в том, что он утверждает A. Но N возражает и говорит, что он не утверждает A. Тогда M заключает: значит, N утверждает $\sim A$. Но N упорствует и заявляет, что он не утверждает $\sim A$. В ответ M тут же уличает N в противоречии, и аудитория, как правило, относится к этому одобрительно. Тот факт, что N вообще может быть безразличен к проблеме, не утверждая ни A, ни $\sim A$, остается незамеченным. Здесь не имеет значения то, что причины подобной небрежности могут иметь вненаучную природу. Важен результат: ситуация трех возможностей оценивается с точки зрения правил, уместных для ситуаций двух возможностей. Именно такого рода тривиальные с логической точки зрения явления образуют основу многих методологических проблем, которые считаются сверхсложными порождениями современной сверхсложной науки.

Ниже мы определим классические и неклассические отношения высказываний в общей логической терминологии и сформулируем для них своеобразную «теорему единственности». Сделаем это для простейшего случая двух высказываний, полагая, что обобщение на случай любого числа высказываний есть дело чисто техническое:

$D1$. Дополнением к X и Y будем называть высказывание $Z^1 \cdot, \ldots, \cdot Z^m$ ($m \geqslant 1$), где $Z^1, \ldots, Z^m$ есть любая комбинация из высказываний X, Y, $\sim X$ и $\sim Y$.

D 2. Если Z есть дополнение к X и Y и при этом $X : Y : Z \vdash X : Y$, то Z есть пустое дополнение к X и Y. Если $X : Y : Z \vdash X$, $X : Y : Z \vdash Y$ или $\vdash \sim (X : Y : Z)$, то Z есть сокращающее дополнение к X и Y.

$T1$. Для X и Y имеется одно-единственное дополнение, которое не является пустым и сокращающим, и это дополнение есть $\sim X \sim Y$. Теорема доказывается по индукции путем перебора всех возможных дополнений к X и Y и установления того, что утверждение $X : Y : \sim X \sim Y \vdash X : Y$ недоказуемо в нашей теории логического следования, а во всех прочих случаях доказуемы утверждения вида $X : Y : Z \vdash X : Y$, $X : Y : Z \vdash X$, $X : Y : Z \vdash Y$, $\vdash \sim (X : Y : Z)$.

$D3$. Будем говорить, что высказывания X и Y находятся в классическом отношении, если и только если истинно $X:Y$, и в неклассическом отношении, если и только если истинно $X : Y : Z$, где Z есть дополнение к X и Y, не являющееся пустым и сокращающим.

T 2. Согласно T_1, если X и Y находятся в неклассическом отношении, то Z есть $\sim X \sim Y$.

$T3$. Согласно $T2$ и $D3$, каждому случаю классического отношения высказываний соответствует один, и только один, случай неклассического отношения тех же высказываний (теорема единственности неклассического отношения).

Выше мы рассмотрели отношения пар высказываний $P(s)$ и $\neg P(s)$, $(\forall a) X$ и $(\neg\forall a) X$, $(\exists a) X$ и $(\neg\exists a) X$, $(X \to Y)$ и $(X \neg\to Y)$. Все они суть примеры неклассических отношений. Пример классического отношения — отношение X и $\sim X$, а также отношения в приведенных парах в случаях, когда исключены неопределенности.

В предшествующем параграфе мы рассматривали высказывания A, B, X, Y и их отрицания. При этом в классическом отношении находятся пары A и $\sim A$, B и $\sim B$, X и $\sim X$, Y и $\sim Y$, A и B, а в неклассическом — пары AX и $A \sim X$, AX и $\sim A$, $A \sim X$ и $\sim A$. Как видим, неклассические случаи вполне описываются в двузначной логике, не исключая при этом возможности использования многозначной.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы стремились показать, что научные знания возможно рассматривать как особого рода видимые, слышимые и т. п. предметы и пространственно-временные конструкции из таких предметов, а операции с ними — как манипулирование с такими предметами по строго определенным правилам. При этом ни в коем случае не отпадают проблемы, связанные с процессами получения научных знаний (эвристические) и с их отношением к соответствующим предметным областям (семантические). Наоборот, лишь при этом условии становится возможным осуществить абстракции, без которых немыслим научный анализ самой науки.

Мы, далее, стремились показать, что логика науки сводит все многообразие форм научных знаний, способов их получения и записи и т. д. к некоторым фундаментальным «кирпичикам», из которых они в конечном счете строятся, а именно — к терминам, высказываниям и логическим операторам и операциям с ними. При этом логика науки есть не столько наука описательная, сколько изобретающая. Конечно, наблюдение фактов языка науки и операций с его элементами дает материал для деятельности логиков и стимулирует постановку новых проблем перед ними. Однако основная направленность логики науки заключается в выяснении логически мыслимых способов образования терминов и высказываний (и производных от них конструкций), в установлении правил оперирования ими для всевозможных типов ситуаций, в которых могут встретиться языковые образования того или иного логического типа.

При решении этой своей профессиональной задачи логика должна, как нам кажется, стремиться к тому, чтобы по ее вине в науках не возникали неясности, путаница, неразрешимые ситуации, парадоксальные ситуации и т. п., чтобы свойства рассматриваемых в логике средств языка науки были определены максимально полно, чтобы предлагаемые логикой результаты были достаточно просты и удобны с точки зрения представителей конкретных наук. К сожалению, логика науки пока еще далека от описанного идеала, а ее утилитарность зависит не только от логиков (которые, кстати сказать, сделали довольно много полезного для науки), но и от характера образования, потребностей и условий исследования деятелей конкретных наук. Так что этот идеал мы рассматриваем как одну из тенденций истории науки, к тому же не являющуюся господствующей.

Содержание

Зиновьев А. А.

З-63 Логика науки. М., «Мысль», 1971.
279 с.

Известный советский логик в этой работе достаточно популярно рассматривает возможности применения логики в научных исследованиях. В работе излагается теория определений и теория вывода, неклассическая логика, в том числе модальная и многозначная, а также логика норм и логика квантовой механики.

Книга рассчитана на широкий круг научных работников — естественников, философов, логиков, а также преподавателей вузов, студентов и аспирантов.

1—5—7
165—70 16

Зиновьев, Александр Александрович

ЛОГИКА НАУКИ

Редактор *Д. А. Замилов*
Младший редактор *В. А. Нартикоева*
Художественный редактор *Е. М. Омельяновская*
Технический редактор *С. П. Лебедева*
Корректор *Г. М. Ефимова*

Сдано в набор 8 июля 1970 г. Подписано в печать 29 декабря 1970 г. Формат бумаги 84×108$^{1}/_{32}$, № 2. Усл. печатных листов 14,7. Учетно-издательских листов 14,2. Тираж 12 000 экз. А07571. Цена 1 р. 06 к. Заказ № 1290.

Издательство «Мысль». Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 1 «Печатный Двор» имени А. М. Горького Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, г. Ленинград, Гатчинская ул., 26.